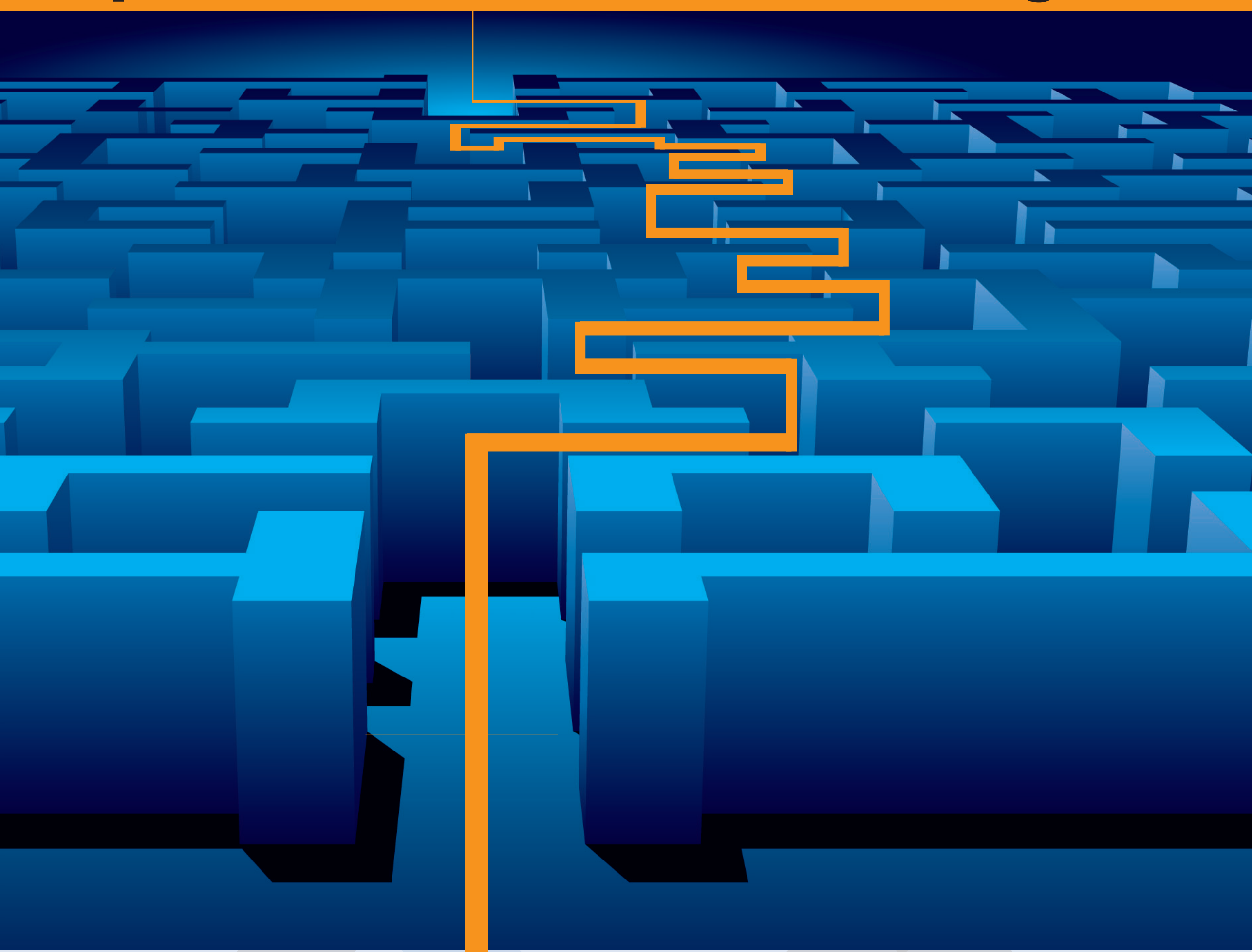
Semei Leopoldo Coronado Ramírez
Salvador Sandoval Bravo
Víctor Hugo Gualajara Estrada
Ana Torres Mata

MAPLE 13
para cálculo diferencial e integral



Universidad de Guadalajara

Maple 13 para cálculo diferencial e integral

Semei Leopoldo Coronado Ramírez
Salvador Sandoval Bravo
Víctor Hugo Gualajara Estrada
Ana Torres Mata

Maple 13 para cálculo diferencial e integral

Universidad de Guadalajara
2011

Este libro fue sometido a un proceso de
dictaminación a doble ciego de acuerdo
con las normas establecidas por el Comité
Editorial del Centro Universitario de
Ciencias Económico Administrativas de la
Universidad de Guadalajara

Primera edición, 2011

ISBN E-book 978-607-450-451-4

Hecho en México
Made in Mexico

Índice

Prólogo

En los últimos años, el crecimiento de las tecnologías de información ha producido transformaciones profundas en la forma de hacer y ver las matemáticas. Las ciencias sociales y la ingeniería, junto con muchas otras disciplinas afines, se han beneficiado enormemente con el desarrollo de paquetería especializada en matemáticas. En particular, Maple 13 ha coadyuvado a la generación de nuevos paradigmas en el desarrollo del cálculo diferencial e integral, como lo muestran los autores.

En este libro, los profesores Semei Leopoldo Coronado Ramírez, Víctor Hugo Gualajara Estrada, Salvador Sandoval Bravo y Ana Torres Mata, conjuntan generosamente su amplia trayectoria en docencia e investigación. Los autores, en todo momento, utilizan un lenguaje claro y sencillo perteneciente al docente que quiere transmitir conceptos e ideas fundamentales y que tiene la sensibilidad para tomar algunos minutos a fin de explicar los detalles en cada uno de los ejercicios propuestos. Seguramente, esta obra se convertirá en una referencia obligada para todos aquellos que deseen incrementar su productividad en el desempeño de sus actividades académicas y/o profesionales.

Dr. Francisco Venegas Martínez
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Economía
Julio, 2010

Introducción

La actual tendencia, cada vez más marcada, de cuantificación en la ciencias, en los métodos, en los procesos y en las ramas aplicadas, requiere la capacitación de especialistas de alta calidad, que sean capaces de aprovechar las grandes ventajas que ofrecen las calculadoras graficadoras y los sistemas algebraicos de computación. Por ejemplo, realizar operaciones algebraicas, obtener una precisión extraordinaria en ciertos cálculos, trazar gráficas de funciones en dos y tres dimensiones y poder manipularlas, suele ser una tarea ardua y en ocasiones tediosa para quienes deben realizarla. Así, podemos hablar de las calculadoras graficadoras HP 50G o Voyage 200 de Hewlett Packard y Texas Instruments, respectivamente, de la misma forma de sistemas algebraicos de computación como el Matlab, Mathematica o Maple.

El objetivo del presente trabajo es promover que el lector utilice esta herramienta informática en su aprendizaje matemático mediante un sencillo manual lo suficientemente claro como para motivar la capacitación del principiante en el entorno de Maple.

Para conseguirlo, se presentan los contenidos en pequeñas secciones denominadas laboratorios en los que se desarrollan temas de precálculo, pasando por límites, continuidad, derivación e integración. Cada sección es presentada con claridad apropiada, dotando a cada idea con ejemplos claros y concretos que, más allá de ilustrar el contenido de lo tratado, atraigan la atención y curiosidad del lector interesado en conocer el entorno de este programa. Cada sección finaliza con una pequeña práctica donde se resumen, en una breve cantidad de ejercicios, el contenido más importante de cada sección.

El trabajo se estructura con los siguientes seis laboratorios: el laboratorio 1 presenta el tema de exponentes y radicales, el cual sirve como repaso a los temas más elementales revisados en nuestro texto anterior *Maple 10 para Matemáticas básicas*; el laboratorio 2 aborda los conceptos de límite y continuidad que son el preámbulo para definir la derivada de una función; el laboratorio 3 introduce el concepto de tangente a una curva y los comandos básicos de derivación; el laboratorio 4 revisa una serie de técnicas básicas de derivación tales como las derivadas de orden superior, la derivación implícita y la derivación implícita de orden superior; el laboratorio 5 estudia los comandos utilizados para obtener los valores críticos de una función, los máximos y mínimos relativos, los extremos absolutos, los puntos de inflexión, los intervalos donde la curva es creciente, decreciente, cóncava hacia abajo y cóncava hacia arriba; finalmente, el laboratorio 6 analiza los temas de integración indefinida y definida, además de los conceptos de área bajo una curva o área entre curvas, a través de los comandos propios de Maple.

Esperamos que este material sirva para despertar en el alumno el interés por aprender más sobre las herramientas informáticas que existen en el área de Métodos Cuantitativos como apoyo para las carreras económico administrativas.

Los autores[1]
Doctor Semei Leopoldo Coronado Ramírez
Doctor Salvador Sandoval Bravo
Maestro Víctor Hugo Gualajara Estrada
Maestra Ana Torres Mata

---

[1] Nuestra gratitud infinita a Nabila Serrano Moreno por la captura de este documento.

Necesidades del sistema

Windows®

Versión	CPU	RAM recomendado	Disco duro
Windows XP Pro	Intel Pentium III 650 MHz o equivalente	512 MB	1 GB
Windows XP Home	Intel Pentium III 650 MHz o equivalente	512 MB	1 GB
Windows 2003 Server	Intel Pentium III 650 MHz o equivalente	512 MB	1 GB
64-bit Windows (XP, Windows Vista, or Windows 7)	AMD X86_64, 1 GHz, Intel Xeon, Intel 64	512 MB	1 GB
64-bit Windows 2008 Server	AMD X86_64, 1.4 GHz, Intel Xeon, Intel 64	512 MB	1 GB
Vista Home Basic	Intel Pentium III 1 GHz o equivalente	512 MB	1 GB
Vista Home Premium Business Ultimate Edition	Intel Pentium III 1 GHz o equivalente	1 GB	1 GB
Windows 7	Intel Pentium III 1 GHz o equivalente	512 MB	1 GB

- DVD-ROM (para DVD de instalación).
- 16-bit de color para 1024x768 (o mayor) resolución recomendada.
- Conección TCP/IP habilitada.
- El rendimiento del sistema puede verse afectado si se ejecuta por debajo del requisito de memoria recomendada.
- El clásico modo *worksheet* no se encuentra habilitado en Windows 64-b.

Comandos más utilizados en Maple

in

Operador de pertenencia para conjuntos.

evalb(exprb)

Evalúa una expresión booleana.

union(c1,c2)

Operador de unión para conjuntos.

intersection(c1,c2)

Operador de intersección para conjuntos.

minus(c1,c2)

Operador de diferencia para conjuntos.

subset(c1,c2)

Operador de subconjuntos.

powerset(c1)

Calcula el conjunto potencia de un conjunto, requiere el comando with(combinat).

nops(c1)

Obtiene la cardinalidad de un conjunto.

restart

Limpia la memoria de Maple para todas las definiciones.

unassign('var')

Limpia una variable nombrada var=variable.

unapply(expr)

Retorna un operador de una expresión en forma de función.

with( )

Trae funciones adicionales que se encuentran en la biblioteca de Maple.

numer( )

Selecciona el numerador de una fracción.

denom( )

Selecciona el denominador de una fracción.

ifactor(n)

Da la factorización de números primos para un entero dado.

lhs(eqn)

Selecciona el lado izquierdo de una ecuación.

rhs(eqn)

Selecciona el lado derecho de una ecuación.

rationalize(expr)

Racionaliza el denominador de una expresión.

simplify(expr)

Simplifica una expresión.

expand(expr)

Expande la expresión dada.

eval(expr,x=v)

Evalúa las expresiones en un punto donde x=a.

evalf(expr)

Evalúa numéricamente una expresión dando por *default* 10 dígitos.

evalf(expr,n)

Evalúa numéricamente una expresión dando el número de dígitos que se requieran.

factor(expr)

Factoriza una expresión.

fsolve(eqn)

Encuentra numéricamente (por aproximación) la solución de una ecuación, cuando se le da el valor de x.

subs(x= v,expr)

Sustituye el valor de una variable en la variable independiente de la expresión.

solve(eqn)

Encuentra la solución exacta de una ecuación incluyendo ecuaciones con letras y sistemas lineales.

plot( )

Gráfica de funciones definidas por expresiones algebraicas, más de una expresión a la vez, puntos, ecuaciones paramétricas, etc.

display( )

Combina graficas de funciones y puntos (requiere el comando with(plots)).

implicitplot( )

Gráfica de funciones definidas implícitamente.

Matrix([])

Es el comando para crear una matriz.

DeleteRow(M,#)

Elimina una fila de una matriz, donde M es la matriz y # es el número de fila a eliminar.

DeleteColumn(M,#)

Elimina una columna de una matriz, donde M es la matriz y # es el número de columna.

RowOperation(M,α,#)

Multiplica una fila de una matriz por un escalar, donde M es la matriz, α, es un escalar y # es el número de la fila.

RowOperation(M,[ ])

Hace el intercambio de filas en una matriz, donde M es la matriz.

ColumnOperation(M,α,#)

Multiplica una columna por un escalar, donde M es la matriz, α, es el escalar y # el número de columna.

ColumnOperation(M,[ ])

Hace el intercambio de columnas en una matriz, donde M es la matriz.

MatrixAdd()

Suma dos matrices.

Multiply()

Multiplica dos matrices.

ScalarMultiply()

Multiplica una matriz por un escalar.

MatrixScalarMultiply()

Multiplica una matriz por un escalar.

Transpose()

Transpone una matriz.

Determinant()

Calcula el determinante de una matriz.

MatrixInverse()

Calcula la matriz inversa.

ReducedRowEchelonForm(<|>)

Resuelve un sistema de ecuaciones por el método de Gaussiano.

GenerateEquations(,[ ])

Convierte una matriz en un sistema de ecuaciones.

GenerateMatrix()

Convierte un sistema de ecuaciones en un sistema matricial.

LinearSolve()

Resuelve el sistema que está expresado en matrices.

limit()

Calcula el límite de una función.

Limit()

Escribe el límite de una función, sin calcularlo.

piecewise()

Define una función construida por partes.

discont()

Encuentra los puntos de discontinuidad de una función.

Showtangent()

Dibuja una función y la línea tangente para un valor dado de x.

D()

Deriva una función y evalúa la función derivada en x.

diff()

Calcula la derivada de una función.

Implicitdiff()

Deriva una función definida por una ecuación.

CriticalPoints()

Encuentra los puntos críticos de una función.

FunctionChart()

Grafica una función a la vez que señala en la gráfica los intervalos para los cuales la función es creciente y decreciente.

InflectionPoints()

Encuentra los puntos de inflexión de una función.

integrate() o int()

Calcula la integral de una función.

Integrate() o Int()

Escribe la integral de una función, sin calcularla.

normal()

Normaliza una expresión racional.

leftbox()

Grafica los rectángulos por la izquierda de una suma de Riemann.

leftsum

Calcula la suma de Riemann por la izquierda.

rightbox

Grafica los rectángulos por la derecha de una suma de Riemann.

Rightsum

Calcula la suma de Riemann por la derecha.

CONSTANTES MATEMÁTICAS

Pi π (Debe ser necesariamente Pi con P mayúscula).

exp(1) **e**

I $\sqrt{-1}$

OTRAS FUNCIONES CONSTANTES MATEMÁTICAS

sqrt(x)	$\sqrt{x}$
abs(x)	$\lvert x \rvert$
exp(x)	$\mathbf{e}^{x}$

ln(x)	Logaritmo natural.
log(x)	Logaritmo natural igual que *ln(x)*.
log[n](x)	Logaritmo base n.

Funciones trigonométricas:
sin(x), cos(x), tan(x), cot(x), sec(x), csc(x)

Funciones trigonométricas inversas:
arcsin(x), arccos(x), arctan(x)

COLORES UTILIZADOS EN MAPLE

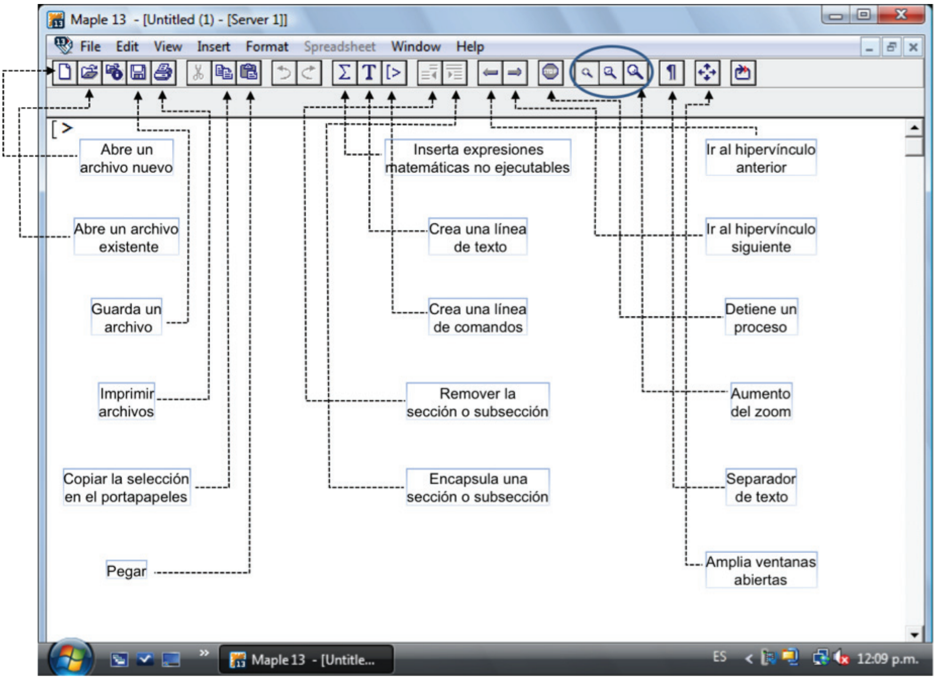
aquamarine	black	blue	navy	coral
cyan	brown	gold	green	gray
khaki	magenta	maroon	orange	pink
plum	red	sienna	tan	turquoise
violet	wheat	white	yellow	

Hoja de trabajo

La principal interface de Maple se denomina hoja de trabajo. A continuación explicaremos brevemente sus principales funciones.

VENTANA DE MAPLE CLÁSICO

A continuación se presenta la ventana de Maple, con una descripción breve de algunos de sus elementos.



CREAR UNA NUEVA LÍNEA DE COMANDO

Utilizar: CTRL + J.
Dar clic al icono .
Use el Menú: **Insert** / **Execution Group** > **After Cursor**.

CREAR UNA LÍNEA DE TEXTO

Utilizar CTRL + T.
Dar clic al icono .
Usar el Menú: **Insert** / **Text Input**.

USO DE UN SEMICOLON (PUNTO Y COMA) *VS.* COLON (DOS PUNTOS)

Al finalizar una línea de comandos matemáticos, se debe utilizar (;) el cual es llamado semicolon. Si requiere utilizar más de una línea de comandos matemáticos, debe utilizar el colon(:).

¿CÓMO REMOVER LAS SALIDAS DE UNA HOJA DE TRABAJO?

Use el Menú: **Edit / Remove Output > From Worksheet**.

¿CÓMO EXPANDIR O COLAPSAR UNA SECCIÓN?

Use el Menú: **View / Expand All Sections (or Collapse All Sections)**.

PARAR EL PROCESO DE OUTPUT DE LENGUAJE MATEMÁTICO:

Para parar un proceso utilice el icono .

CREAR UN NUEVO ARCHIVO / GUARDAR UN ARCHIVO / ABRIR UN ARCHIVO EXISTENTE E IMPRIMIR

Use el Menú: **File / New, Open, Save, Save As, Print,** o en su caso CTRL + P o dar clic a los iconos de abrir un archivo ya existente , un nuevo archivo , para guardar y para imprimir .

¿CÓMO CORTAR, COPIAR O PEGAR?

Use la barra de herramientas de clic al icono de cortar , copiar y pegar . También puede cortar, copiar o cortar seleccionando el párrafo o la línea de trabajo matemático.

USO DE LA AYUDA

Puede dar clic en la barra de herramientas a la palabra *Help* o en su defecto escriba la palabra que requiere buscar en comandos matemáticos y oprima CTRL + F1. Por ejemplo, *factor* luego CTRL + F1 y se desplegará la ayuda sobre este comando.

AUTO-GUARDAR

Dar clic en la barra de herramientas al comando *Options* y busque *Autosave* y seleccione el intervalo que requiera para guardar sus archivos.

VER LAS PALETAS

Dar clic en el menú de **View** y dar clic en **Palettes** y dar clic en **Show All Palettes**; se desplegarán todas la paletas del Maple.

INSERTAR EXPRESIONES MATEMÁTICAS NO EJECUTABLES

Dar clic al icono Σ y escriba el las expresiones matemáticas no ejecutables o texto.

DESHACER LA ÚLTIMA EXPRESIÓN

Dar clic al icono y entonces deshaga la última operación.

REHACER LA ÚLTIMA EXPRESIÓN

Dar clic al icono y entonces rehace la última operación.

INSERTAR SECCIONES O SUBSECCIONES

Dar clic en la barra de herramientas a *Insert*, luego dar clic a *Section* o *Subsection.*

AUMENTO DEL ZOOM

Dar clic al icono para ver al 100%, clic al icono para ver al 150% y dar clic al icono para ver al 200%.

ENCAPSULAR SECCIONES O SUBSECCIONES

Remueve la sección o subsección encapsulada con el icono , encapsula una sección o subsección con el icono .

USO DE SEPARADOR DE TEXTO O LENGUAJE MATEMÁTICO

Puede utilizar el icono ¶ para ver las separaciones.

IR A LOS HIPERVÍNCULOS ANTERIORES O POSTERIORES

Para ir a un hipervínculo anterior dar clic al icono , para ir a un hipervínculo posterior dar clic al icono .

ORGANIZACIÓN DE VENTANAS

Dar clic al icono y automáticamente ampliará las ventanas abiertas.

Laboratorio 1

LEYES DE LOS EXPONENTES Y RADICALES

En este laboratorio se estudiarán las propiedades de los exponentes y radicales, además se revisarán algunos de los comandos algebraicos más utilizados a lo largo del texto tales como: *simplify*, *solve* y *evalf.*

EXPONENTES

Ejemplificaremos con Maple cada una de las siguientes propiedades de los exponentes.

Utilizaremos en los siguientes ejemplos la función *simplify()* para reducir expresiones algebraicas a su forma más simple.

Para la multiplicación $a^m a^n = a^{m+n}$, al calcular $a^{10}a^4$ tenemos

```
> simplify(a^10*a^4);
```

a^{14}

Ahora la división, $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$, calculemos $\frac{b^{23}}{b^{12}}$

```
> simplify(b^23/b^12);
```

b^{11}

En el caso de la potencia cero, $a^0 = 1$, procedemos a obtener z^0

> simplify(z^0);

1

En el caso de la potencia de una expresión exponencial, $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$, determinar $\left(b^5\right)^3$

> simplify((b^5)^3);

b^{15}

Para la potencia de un producto $\left(ab\right)^n = a^n b^n$, podemos calcular $(cd)^7$

> simplify((c*d)^7);

$c^7\, d^7$

Ahora ilustremos la potencia de un cociente, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, calculemos $\left(\frac{r}{t}\right)^8$

> simplify((r/t)^8);

$$\frac{r^8}{t^8}$$

Para un exponente negativo, $a^{-t} = \frac{1}{a^t}$, ilustremos con el siguiente ejemplo $z^{(-10)}$

> simplify(z^(-10));

$$\frac{1}{z^{10}}$$

Practicaremos ahora con otros comandos que ilustran las propiedades de los exponentes

Ejemplo, simplifique $\dfrac{30x^5y^7}{15x^2y^3}$

```
> simplify((30*x^5*y^7)/(15*x^2*y^3));
```

$$2\,x^3\,y^4$$

Desarrolle la expresión $\left(3x^2y^3\right)\left(7x^4y^5\right)$

```
> simplify((3*x^2*y^3)*(7*x^4*y^5));
```

$$21\,x^6\,y^8$$

Simplifique $\left(\dfrac{3a^3b^5}{13c^4}\right)^2\left(\dfrac{26c^5}{9a^2b^3}\right)^2$

```
> simplify(((3*a^3*b^5)/(13*c^4))^2*((26*c^5)/
(9*a^2*b^3))^2);
```

$$\frac{4\,a^2\,b^4\,c^2}{9}$$

LOGARITMOS

Ilustraremos a continuación algunas propiedades de la función logaritmo, al mismo tiempo que mostramos el uso de la función *log*. Utilizaremos también la función *evalf()* para evaluar numéricamente. Primeramente, calcularemos $\log_3 550$

```
> evalf(log[3](550));
```

5.743535132

A continuación se da un ejemplo numérico para exhibir el hecho de que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores, es decir, $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$, por ejemplo, $log_5(8 * 5) = log_5(8) + log_5(54)$

```
> evalf(log[5](8*54));
```

3.770524817

```
> evalf(log[5](8)+log[5](54));
```

3.770524817

Mostraremos ahora de manera numérica que el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador, esto es,

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) + log_a(y)$$

Por, $log_7\left(\frac{643}{49}\right) = log_7(643) - log_7(49)$, ejemplo,

```
> evalf(log[7](643/49));
```

1.322941055

```
> evalf(log[7](643)-log[7](49));
```

1.322941055

Ejemplificaremos ahora que el logaritmo de un número elevado a una potencia es igual a la multiplicación de la potencia por el logaritmo del número, $log_a(x^n) = n\,log_a(x)$ con el ejemplo $log_4(72^9) = 9\,log_4(72)$.

```
> evalf(log[4](72^9));
```

27.76466250

```
> evalf(9*log[4](72));
```

27.76466250

Ahora revisaremos la propiedad de cambio de base $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ mediante un caso numérico,

$$log_6(201) = \frac{\ln(201)}{\ln(6)}$$

```
> evalf(log[6](201));
```

2.959830825

```
> evalf(ln(201)/ln(6));
```

2.959830825

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Una ecuación recibe el nombre de ecuación exponencial si la variable aparece en uno o más exponentes, y una ecuación es logarítmica si la variable es parte de un número cuyo logaritmo será tomado.

Ejemplo, resolver la ecuación exponencial $3^{x+4} = 5^{x+2}$.

Podemos obtener la solución exacta de la ecuación empleando el comando *solve.*

```
> solve(3^(x+4)=5^(x+2),x);
```

$$-\frac{2(2\ln(3)-\ln(5))}{\ln(3)-\ln(5)}$$

O podemos obtener la solución aproximada de la ecuación mediante el comando *fsolve*

```
> fsolve(3^(x+4)=5^(x+2),x);
```

2.301320206

Ejemplo, resolver la ecuación logarítmica $log_6(x+3)+log_6(x-2)$. De igual forma podemos resolver la ecuación logarítmica mediante el comando *solve*

```
> solve(log[6](x+3)+log[6](x-2)=1,x);
```

3

En este ejemplo se resolverá el siguiente sistema de ecuaciones exponenciales:

$$3^{2x-y}=10$$

$$5^{x-2y}=100$$

Primero se despeja la variable *x* de ambas ecuaciones empleando el comando *solve* y nombrando la variable despejada *x1* y *x2*:

```
> x1:=solve(3^(2*x-y)=10,x);
```

$$x1 := \frac{1}{2}\,\frac{\ln(3)\,y+\ln(10)}{\ln(3)}$$

```
> x2:=solve(5^(x-2*y)=100,x);
```

$$x2 := \frac{2\,\ln(5)\,y+\ln(100)}{\ln(5)}$$

Finalmente se igualan las ecuaciones y se despeja el valor de *y*.

```
> y:=fsolve((x1)-(x2)=0,y);
```

$$y := -1.208934319$$

Para completar el trabajo, encontraremos *x* sustituyendo el valor de *y* en cualquiera de las ecuaciones simultáneas, utilizando el comando *eval*.

```
> eval(x1,y=-1.2089);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{-1.2089\ln(3)+\ln(10)}{\ln(3)}$$

Para obtener el valor aproximado de la expresión anterior, usaremos %

```
> evalf(%);
```

$$0.4435016369$$

Este último es el valor de *x*.

PRÁCTICA 1

1. Ejecute las operaciones indicadas:

a) $\left(a^{34}\right)^{4}$ b) $\left(a^{2}b^{8}\right)^{7}$ c) $\left(\frac{a^{5}}{a^{2}}\right)^{0}$

2. Simplifique

a) $\frac{28x^{2}y^{5}}{4x^{2}y^{3}}$ b) $\frac{60x^{5}y^{8}}{10x^{3}y^{3}}$ c) $\frac{c^{2-y}}{c^{1+y}}$

3. Muestre numéricamente que

a) $ln\left(\sqrt[3]{\frac{754}{75}}\right) = \frac{1}{3}[\ln(754) - \ln(75)]$

b) $ln\left(\frac{7^5 32^6 \sqrt[3]{97}}{\sqrt[2]{34}}\right) = 5\ln(7) + 6\ln(32) + \frac{1}{8}\ln(97) - 2\ln(34)$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas y exponenciales

a) $2^{x+1} = 3^x$

b) $5^{2x-3} = 7^{x-1}$

c) $log_6(x+1) + log_6(x+2) = 1$

d) $log(4x+5) - log(x+2) = 1$

5. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $3^{2x+y} = 240, \qquad 3^{x-y} = 2$

b) $2^{-x+2y} = 3, \qquad 7^{3x-y} = 2$

Laboratorio 2

LÍMITES Y CONTINUIDAD

En este apartado se estudiará cómo calcular límites de diferentes formas con Maple, así cómo se determinará si una función es continua o no. Esencialmente se utilizan los comandos *limit*, *discont* y *piecewise,* así como el comando *plot.*

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Comenzaremos calculando límites para diversas funciones. Para calcular el $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$, primeramente se borrará la memoria de Maple con el comando *restart;* de no ser así, el programa podría utilizar información definida previamente.

```
> restart;
```

Sea la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

```
> f:=x->(x-1)/(x^2-1);
```

$$f := x \to \frac{x-1}{x^2-1}$$

Ahora calculamos el valor del límite al cual tenderá x; nombrando el valor por la letra a

```
> a:=1;
```

$$a := 1$$

Utilicé el comando *limit* para calcular el límite de la función anterior

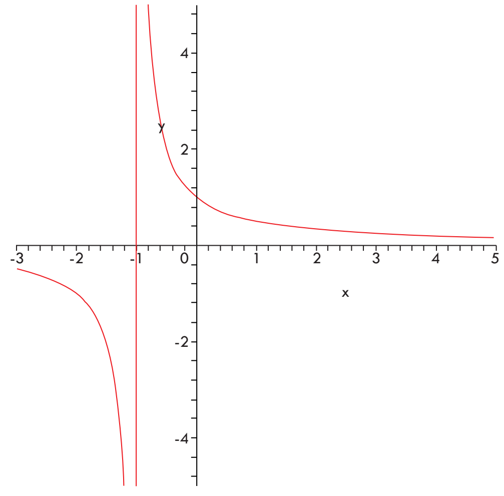
> limit(f(x),x=a);

$$\frac{1}{2}$$

Grafique la función con el comando *plot* dando valores al eje *x* de –4 a 4 y al eje *y* de –5 a 5.

> plot(f(x),x=a-4...a+4,y=-5...5);

GRÁFICA 1

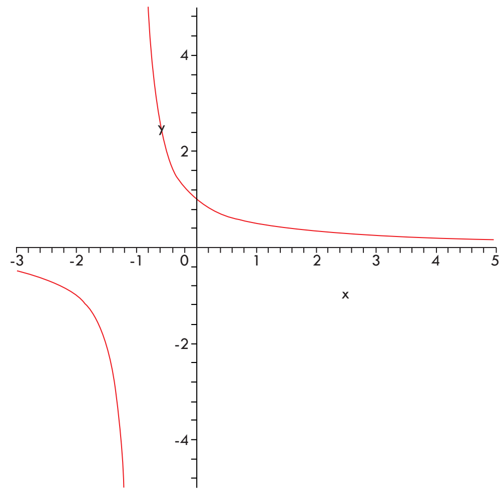


Observe que en el gráfico existe una discontinuidad de la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, la línea vertical que se da en el gráfico es lo que se llama asíntota vertical, cuando $x=-1$.

Luego entonces, se averiguará si realmente existe una discontinuidad en la función por medio del gráfico y del comando *discont*, en $x = -1$, Si mencionamos que la discontinuidad es verdadera, graficará la misma función eliminando la asíntota.

> plot(f(x),x=a-4...a+4,y=-5...5,discont=true);

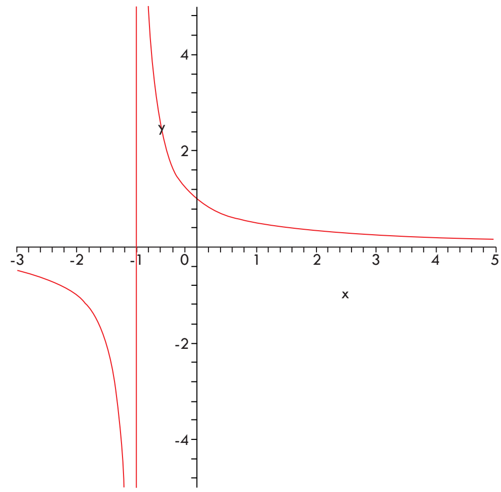
GRÁFICA 2



Ahora si se menciona que es falsa la discontinuidad, o sea, que no existe, graficará la función junto con la asíntota que pasa exactamente en el punto de discontinuidad.

> plot(f(x),x=a-4..a+4,y=-5..5,discont=false);

GRÁFICA 3



Ahora calcule el siguiente límite $\lim_{x\to -1} \frac{|x+1^3|}{x} + 1$.

Recuerde, antes de iniciar cualquier operación utilice el comando *restart* para borrar la memoria de Maple, ya que está utilizando la misma variable *x* que el ejemplo anterior.

> restart;

Cree la función $f(x) = \frac{|x+1|^3}{x+1}$

> f:=x->abs(x+1)^3/(x+1);

$$f := x \to \frac{|x+1|^3}{x+1}$$

El valor de *x* nómbrelo por *a*

> a:=-1;

$$a := -1$$

Calcule el límite

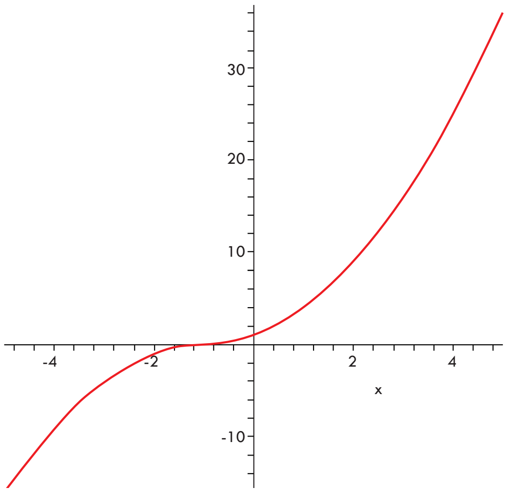
> limit(f(x),x=a);

0

Grafique la función dando valores al eje *x* desde -5 hasta 5

> plot (f(x),x=-5...5);

GRÁFICA 4



Observe que no existe ninguna discontinuidad, en este ejemplo la función es continua; en otras palabras existe, el límite, para $x=a$.

El siguiente ejemplo es también un límite con valor absoluto, el cual contiene discontinuidad.

Borre la memoria de Maple nuevamente con el comando *restart.* Calcule el siguiente límite $lim_{x \to -1} \frac{|x+1|}{x+1}$

> restart;

Cree la función $f\left(x\right)=\frac{\left|x+1\right|}{x+1}$

> f:=x->abs(x+1)/(x+1);

$$f := x \rightarrow \frac{|x+1|}{x+1}$$

El valor de *x* nómbrelo por *a*

> a:=-1;

a := -1;

Calcule el límite de la función cuando *x* tiende a -1

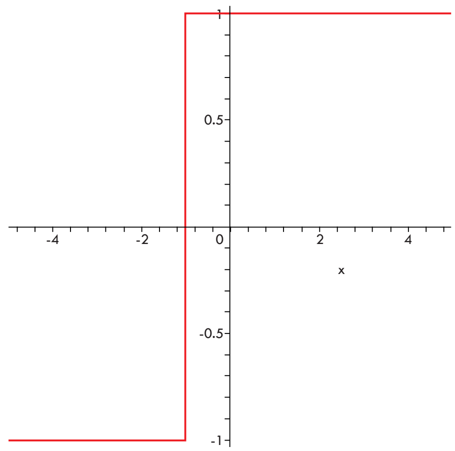
> limit(f(x),x=a);

undefined

El resultado que arroja el cálculo es que no está definido el límite. Se probará lo anterior primeramente graficando la función. Grafique la función *f(x)* dando valores en el eje *x* desde -5 hasta 5.

> plot(f(x),x=-5...5);

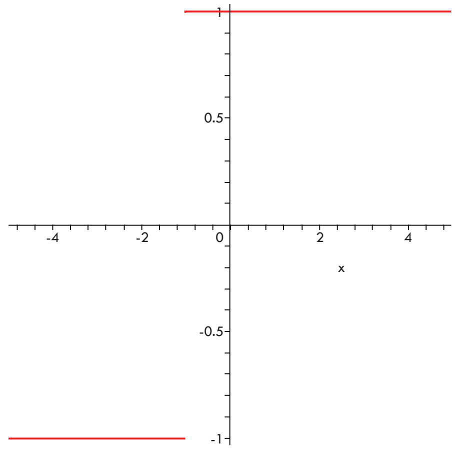
GRÁFICA 5



Observe que existe una discontinuidad, ahora dentro del comando de gráfico mencione que la discontinuidad es verdadera,

```
> plot(f(x),x=-5...5,discont=true);
```

GRÁFICA 6



Se ha quitado la discontinuidad, mostrando que es verdad que la función no es continua en todo su dominio.

Ahora se darán diferentes ejemplos, pero con límites que tienden al infinito.

Antes de iniciar, borre la memoria del Maple, ya que de no hacerlo se seguirá utilizando la variable *x*, pero usted puede utilizar otra variable si lo desea, esto sólo se hace por cuestión práctica.

```
> restart;
```

Calcule el siguiente límite $\lim_{x \to \infty} \frac{7}{2x+1}$.

Primeramente defina la función

```
> f:=x->7/(2*x+1);
```

$$f := x \to \frac{7}{2\,x+1}$$

El valor de *x,* el cual tiende al infinito, nómbrelo por la letra *a* y la palabra *infinity.*

```
> a:=infinity;
```

$$a := \infty$$

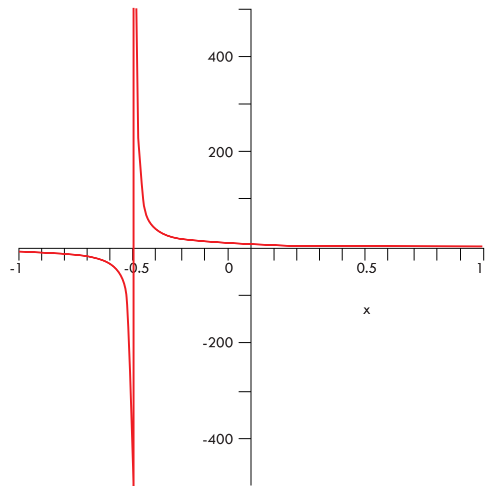
Realice el cálculo del límite y grafíquelo.

```
> limit(f(x),x=a);
```

$$0$$

```
> plot(f(x),x=-1...1);
```

GRÁFICA 7



Ejemplo, calcule el siguiente límite $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$

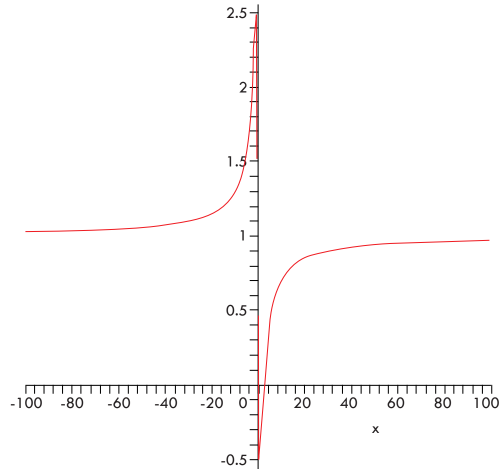
> limit((x^2-3*x+1)/(x^2+1),x=infinity);

1

Grafique el límite anterior dando valores al eje x de -100 hasta 100.

> plot((x^2-3*x+1)/(x^2+1),x=-100...100);

GRÁFICA 8



Existe una discontinuidad en la función anterior cuando *x=1*, lo cual es llamado *asíntota horizontal.*

Ahora se harán algunos ejemplos de límites infinitos, al mismo tiempo considerando los límites laterales.

Calculé el siguiente límite $\lim_{x \to 0} \frac{8}{x}$

```
> limit(8/x,x=0);
```

undefined

Observe que el resultado muestra que no existe el límite. Se corroborará este resultado calculando el límite por la izquierda y por la derecha, para que finalmente se grafique. Para ello sólo se añade la palabra *left* si es por la izquierda, y la palabra *right* si el cálculo se hace por la derecha.

```
> limit(8/x,x=0,left);
```

$-\infty$

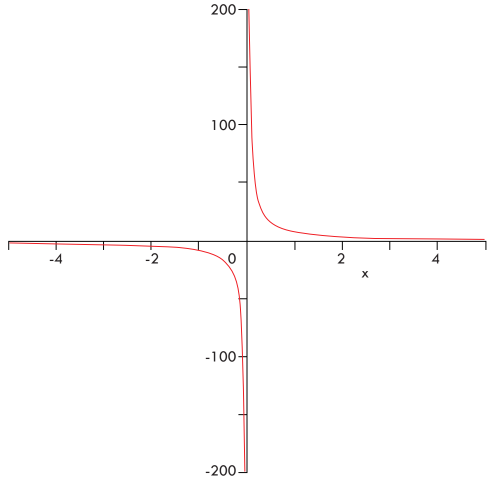
```
> limit(8/x,x=0,right);
```

$$\infty$$

Grafique la función dando valores al dominio de -5 hasta 5 y observe el gráfico

```
> plot(8/x,x=-5...5);
```

GRÁFICA 9



Existen tanto asíntotas horizontales y verticales; en este caso existe una asíntota vertical en $x = 0$, lo cual lleva a concluir de que no existe límite para esta función.

Para el caso de funciones definidas por partes, con el Maple es sencillo graficar para determinar si existe o no la discontinuidad para algún punto.

Compruebe si existe continuidad o no de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 0 \\ 5, & x = 0 \\ x^2 + 4x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

Borre la memoria de Maple primeramente. Para crear la función anterior se debe utilizar el comando *piecewise,* el cual se utiliza bajo el supuesto de que la función es continua, para lo cual tendremos que graficar, y a partir del gráfico ver si es continua o no la función.

Se debe crear la función definida anteriormente, y cuando se declare la función, ahí se debe utilizar el comando *piecewise*, nombrando primero la restricción y después la función.

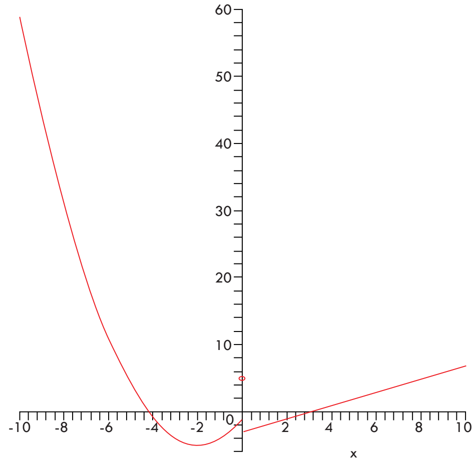
```
> restart;

> z:=x->piecewise(x>0,x-3,x=0,5,x<0,x^2+4*x-1);
```

$$z := x \rightarrow \text{piecewise}(0 < x, x - 3, x = 0, 5, x < 0, x^2 + 4\,x - 1)$$

Ahora grafique la función, bajo el supuesto de que existe discontinuidad.

```
> plot(z(x),x=-10...10,discont=true);
```

GRÁFICA 10



De acuerdo al gráfico se puede concluir que la función es discontinua, existe una sección de una parábola, un punto y parte de una línea recta.

Crearemos ahora otro ejemplo donde se muestra una función continua definida por partes. Primero, borre la memoria de Maple.

```
> restart;
```

Graficar la siguiente función. Determine dónde la función es discontinua.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-4 \\ 4x+16, & -4\le x\le -2 \\ 2x^2, & -2<x\le 1 \\ 5\sqrt{x+3}-8 & 1<x\le 6 \\ 7, & x>6 \end{cases}$$

Se sigue el mismo procedimiento que el ejemplo anterior utilizando el comando *piecewise*, empezando por la restricción, seguida de la función

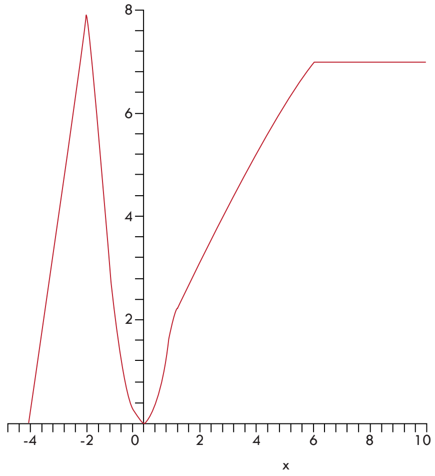
```
> c:=x->piecewise(x<-4,0,-4 <=x and x<=-2,4*x+16,-2<x
and x<=1,2*x^2,1<x and x<=6,5*sqrt(x+3)-8,7);
```

$c := x \rightarrow \mathrm{piecewise}(x<-4,\ 0,\ -4\le x$ **and** $x\le -2,\ 4\,x+16,\ -2<x$ **and** $x\le 1,\ 2\,x^2,\ 1<x$ **and** $x\le 6,\ 5\,\sqrt{x+3}\ -8,\ 7)$

Dibuje la gráfica de color magenta y con un dominio de -5 hasta 10

```
> plot(c(x),x=-5...10,discont=true,color=magenta);
```

GRÁFICA 11



Podemos observar claramente que la función graficada anteriormente es continua.

Ensegida crearemos otro ejemplo donde se muestra una función discontinua. Primero, borre la memoria de Maple con el comando *restart.*

```
> restart;
```

Cree la función utilizando el comando *piecewise,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

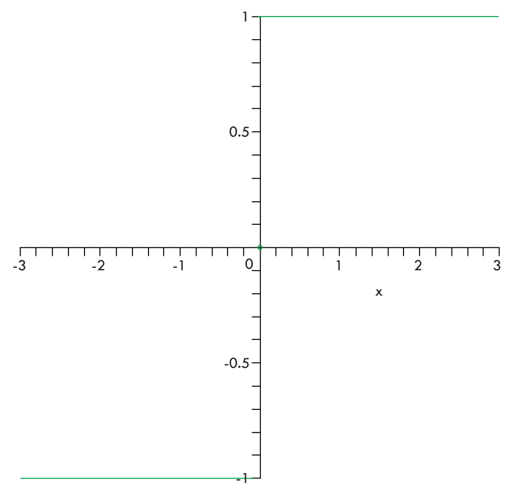
```
> f:=x->piecewise(x>0,1,x=0,0,x<0,-1);
```

$$f := x \rightarrow \text{piecewise}\,(0 < x,\, 1,\, x = 0,\, 0,\, x < 0,\, -1)$$

Grafique la función para ver el punto de discontinuidad en color verde.

> plot(f(x),x=-3...3,discont=true,color=green);

GRÁFICA 12



Existe discontinuidad en la función ya que hay un evidente salto en la función definida por partes, cuando *x=0*. Además, formalmente podemos verificar que el límite de la función no existe cuando *x=0*. Por lo tanto, la función es discontinua en *x=0*.

Verifique si la siguiente función es continua o discontinua

$$s(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x+2, & x \geq 2 \end{cases}$$

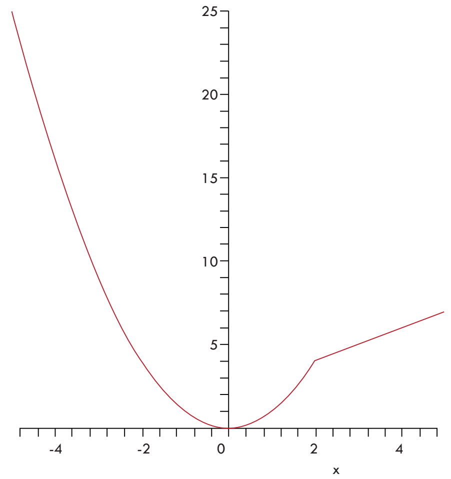
Al utilizar el comando *piecewise* y *plot* se demostrará si existe discontinuidad o no.

> s:=x->piecewise(x>2,x+2,x<2,x^2);

$s := x \rightarrow \text{piecewise}\left(2 < x, x+2, x < 2, x^2\right)$

> plot(s(x),x=-5...5,discont=true);

GRÁFICA 13



Note que no existe ningún salto ni agujero en la gráfica de la función, por lo tanto, es continua para cualquier valor de *x*.

A pesar de que se mencionó en el gráfico de que la función es discontinua, se observa claramente que no es así, es continua para cualquier valor de *x*.

También puede utilizar el comando *discont (f (x), x)*, para encontrar la discontinuidad de una función con respecto a x. Por ejemplo, determine la discontinuidad para la siguiente función $f(x) = \dfrac{6}{x^2 - x - 6}$.

Primero cree la función y luego utilice el comando *discont (f (x), x)*.

> f:=x->x/(x^2-x-6);

$$f := x \to \frac{x}{x^2 - x - 6}$$

```
> discont(f(x),x);
```

$$\{-2, 3\}$$

Observe que el resultado es {2,3} los cuales son los valores de x donde $f(x)$ es discontinua.

PRÁCTICA 2

1. Calcule y grafique los siguientes límites de las funciones:

a) $\lim_{x \to 3}(2x^3 - 7x^2 + 1)$

b) $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}\right)$

c) $\lim_{x \to \infty}\left(\frac{3}{(x-2)^3}\right)$

d) $\lim_{x \to 0^-}\left(\frac{x-1}{x}\right)$

2. Grafique las siguientes funciones construidas por partes y encuentre sus puntos de discontinuidad, si es que existen:

a) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$

3. Grafique las siguientes funciones y encuentre sus puntos de discontinuidad (si para tales gráficas existen asíntotas, grafíquelas):

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2+3x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2-2x}{x^2-4x+3}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

Laboratorio 3
LA DERIVADA

En el presente laboratorio se estudiará el procedimiento para graficar la recta tangente de una función con una variable usando el comando *showtangent*, también se revisarán los comandos básicos para derivar funciones a través de los comandos *diff* y *D(f)*, así como la forma de evaluar la función derivada en un valor dado de x, para calcular la pendiente de la recta tangente; y finalmente se desarrollarán algunos ejemplos sencillos de aplicación en las ciencias económico administrativas.

RECTA TANGENTE

En este apartado se utilizará la biblioteca de Maple, específicamente la biblioteca *student*, con el comando *showtangent* para mostrar cómo se grafica la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto dado; sin tener que derivar ni calcular la pendiente en dicho punto.

Se debe llamar la biblioteca de Maple con el comando *with(nombre de la biblioteca)*. El nombre de la biblioteca que utilizaremos es *student.* Como resultado de la instrucción *with*, se observarán los diferentes comandos que contiene la biblioteca *student.* Para nuestro caso se utilizará el comando *showtangent*.

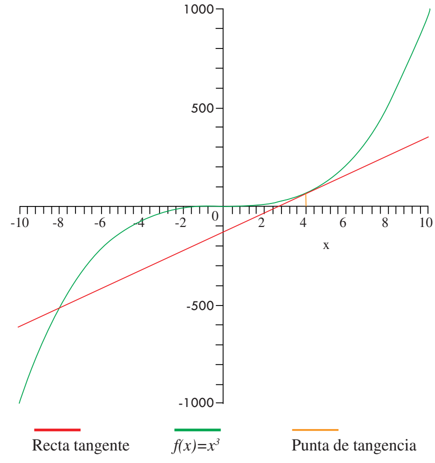
```
> with(student);
```

[D, *Diff, Doubleint, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, changever, completesquare, distance, equiate, integrand, intercept, intparts, leftbox, leftsum, makeproc, middlebox, middlesum, midpoint, pwsubs, rigtbox, rightsum, showtangent, simpson, slope, summand, trapezoid*]

A continuación se muestra la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ cuando $x = 4$, utilizando el comando *showtangent*, mencionando primero la función y después el valor de x.

> showtangent(x^3,x=4);

GRÁFICA 14

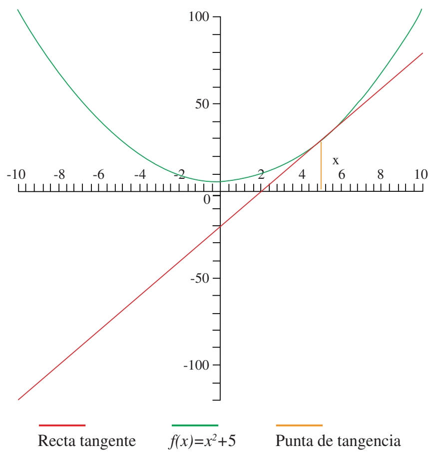


La gráfica de la función $f(x)$ está de color verde y la recta tangente a la gráfica es de color rojo indicando con una línea vertical de color amarillo el punto donde hace tangencia la recta respecto al valor de x.

Otro ejemplo, donde hay que graficar la recta tangente a la gráfica $f(x) = x^2 + 5$ cuando $x = 5$. Utilizando nuevamente el comando *showtangent*.

> showtangent(x^2+5,x=5);

GRÁFICA 15



Como en el ejemplo anterior, la gráfica de la función $f(x)$ es color verde, la recta tangente es de color rojo y, con una línea vertical amarilla indica la tangencia cuando $x = 5$.

FÓRMULAS DE DIFERENCIACIÓN

En esta sección se aprenderá cómo derivar con Maple utilizando las diferentes fórmulas de derivación con los comandos $D(f)$ y *diff*.

Para utilizar $D(f)$ se deberá definir previamente la función. La ventaja de este comando es que el resultado se puede volver a llamar después. La sintaxis *diff* se utiliza para derivar sin necesidad de definir previamente la función, sin embargo, no se puede volver a llamar posteriormente este resultado.

Primero, borre la memoria de Maple con el comando *restart.*

> restart;

Se empezará calculando la derivada por incrementos, después ya se utilizarán los comandos antes mencionados.

Escriba la función $f(x) = x^2$

```
> f:=x->x^2;
```

$f := x \rightarrow x^2$

Calcule las derivadas por incrementos, utilizando

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

```
> (f(x+h)-f(x))/h;
```

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Expanda la función anterior con el símbolo % (que significa el valor anteriormente calculado) para obtener el resultado:

```
> expand(%);
```

$2\,x + h$

Finalmente, calcule el límite cuando h tiende a cero de la función que expandió, llamándolo con el símbolo %, para obtener finalmente la primera derivada.

```
> f´(x)=limit(%,h=0);
```

$f'(x) = 2\,x$

En el siguiente ejemplo se calcula la derivada de la función $f(x) = x$ utilizando el comando $D(f)$, donde D significa la primera derivada de f, que es la función a derivar.

Primero se borra la memoria de Maple.

```
> restart;
```

```
> f:=x->x;
```

$$f := x \to x$$

Utilice el comando $D\,(f)$ para derivar la función anterior.

```
> D(f);
```

$$1$$

El resultado de la primera derivada de la función es $f(x) = x$ es $f'(x) = 1$.

Ahora se calculará la primera derivada para la misma función, sólo que ahora con el comando *diff()*, el cual se utiliza sin necesidad de nombrar la función, para ello se introduce la función y se indica con respecto a qué variable se va a derivar.

El comando *diff*() tiene como primer argumento la función a derivar, la variable con respecto a la cual se va a derivar la función, y como segundo argumento la variable con respecto a la cual se deriva.

```
> diff(x,x);
```

$$1$$

Es el mismo resultado que en el ejemplo anterior, sólo que no es necesario escribir la función. Vea el siguiente ejemplo:

Calcule la primera derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ primero con el comando $D\,(f)$ y después con el comando *diff()*. Observe los resultados:

```
> f:=x->sqrt(x);
```

$$f := x \to \sqrt{x}$$

```
> D(f);
```

$$x \to \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

```
> diff(sqrt(x),x);
```

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

El primer resultado está en forma de función y el segundo es directo. Si se necesita el primer comando, es para posteriormente sustituir valores, lo cual se verá en el siguiente laboratorio. Si utiliza el segundo comando probablemente se desee el valor para no considerar la primera derivada como función.

Encuentre la primera derivada de $f(x) = x(3x^2 - 10x + 7)$ utilizando el comando *diff()*

```
> diff(x*(3*x^2-10*x+7),x);
```

$$3x^2 - 10x + 7 + x(6x - 10)$$

```
> expand(%);
```

$$9x^2 - 20x + 7$$

A continuación se da otro ejemplo para encontrar la primera derivada, donde se utiliza el comando *simplify* y *expand.*

Borre la memoria de Maple

```
> restart;
```

Encuentre la primera derivada de $f(q) = \dfrac{4q^3 + 7q - 4}{q}$ utilizando el comando *diff*

```
> diff((4*q^3+7*q-4)/q,q);
```

$$\frac{12\,q^2 + 7}{q} - \frac{4\,q^3 + 7\,q - 4}{q^2}$$

Observe que se obtiene una resta de fracciones, por lo cual se procede a simplificar la expresión con el comando *simplify* y el operador *%*

```
> simplify(%);
```

$$\frac{4\,(2\,q^3 + 1)}{q^2}$$

Ahora ya está simplificada la expresión, pero todavía hay que expandir el resultado anterior para obtener finalmente la primera derivada de *f(q)*

```
> expand(%);
```

$$8\,q + \frac{4}{q^2}$$

Derive la siguiente función $f(x) = x^5 (x - 4)$

```
> diff(x^5*(x-4)^5,x);
```

$$5\,x^4\,(x-4)^5 + 5\,x^5\,(x-4)^4$$

El resultado es la primera derivada de la función, pero no está factorizada, por lo cual se utilizará el comando *factor* para factorizar la expresión y así tener un mejor resultado.

```
> factor(%);
```

$$10\,x^4\,(x-2)\,(x-4)^4$$

A continuación se darán diferentes ejemplos para derivar funciones logarítmicas y exponenciales.

Derive $f(x) = \ln\left(x^{100}\right)$

```
> diff(ln(x^100),x);
```

$$\frac{100}{x}$$

Encuentre $f'(x) = x$ de $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$

```
> diff(x^2/ln(x),x);
```

$$\frac{2\,x}{\ln(x)} - \frac{x}{\ln(x)^2}$$

El resultado es una resta de fracciones, por lo cual se tendrá que utilizar el comando *factor* para factorizar la expresión.

```
> factor(%);
```

$$\frac{x\,(2\,\ln(x)-1)}{\ln(x)^2}$$

El siguiente ejemplo es para encontrar la primera derivada de una función logarítmica que tiene diferente base. Encuentre la primera derivada de $f(x) = \log_2\left(x^2+4\right)$.

```
> diff(log[2](x^2+4),x);
```

$$\frac{2\,x}{(x^2+4)\ln(2)}$$

Hallar para $f'(x)$ para $f(x) = 7e^x$

```
> diff(7*exp(x),x);
```

$$7\,\mathbf{e}^x$$

¿Cuál es la primera derivada de $f(x) = x^2 e^{-x^2}$?

```
> diff(x^2*exp((-x^2)),x);
```

$$2\,x\,\mathbf{e}^{(-x^2)} - 2\,x^3\,\mathbf{e}^{(-x^2)}$$

El resultado es correcto, sin embargo, se puede factorizar y simplificar la expresión

```
> factor(%);
```

$$-2\,x\,\mathbf{e}^{(-x^2)}\,(x-1)\,(x+1)$$

```
> simplify(%)
```

$$-2\,x\,\mathbf{e}^{(-x^2)}\,(-1+x^2)$$

EVALUACIÓN DE LA DERIVADA

En este apartado aprenderemos que el comando *D(f)* es útil para evaluar la primera derivada. A continuación se dan algunos ejemplos.

Encuentre la pendiente de la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 8$ en los puntos indicados (0,-8), (2,12) y (-3,7).

Se borrará la memoria de Maple

```
> restart;
```

Defina la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 8$

```
> f:=x->3*x^2+4*x-8;
```

$$f := x \to 3\,x^2 + 4\,x - 8$$

Utilice el comando *D(f)* y derive la función enseguida nombre entre paréntesis el valor que en él se requiere evaluar la derivada, para este caso es cero

```
> D(f)(0);
```

$$4$$

El resultado es 4, el cual es el valor de la pendiente en el punto (0,8), sin necesidad de conocer primero la derivada. Sin embargo, si sólo se utiliza el comando *D(f)*, se obtendrá la primera derivada como una función, lo cual se hará en el siguiente paso:

```
> D(f);
```

$$x \to 6\,x + 4$$

Ahora se evaluará el valor de x para los demás puntos, lo cual dará como resultado la pendiente, respectivamente.

```
> D(f)(2);
```

$$16$$

```
> D(f)(-3);
```

$$-14$$

En el siguiente ejemplo se utilizará la biblioteca de Maple para graficar la ecuación de la recta tangente.

Definimos $f(x) = 4x^2 + 5x + 6$. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (1,15) y grafíquela.

Borre la memoria de Maple

```
> restart;
```

Nombre la función $f(x) = 4x^2 + 5x + 6$

```
> f:=x->4*x^2+5*x+6;
```

$f := x \to 4\,x^2 + 5\,x + 6$

Derive la función y evalúela cuando $x = 1$ para encontrar la pendiente de la recta

```
> D(f)(1);
```

13

Encuentre la ecuación de la recta tangente utilizando el comando *solve*

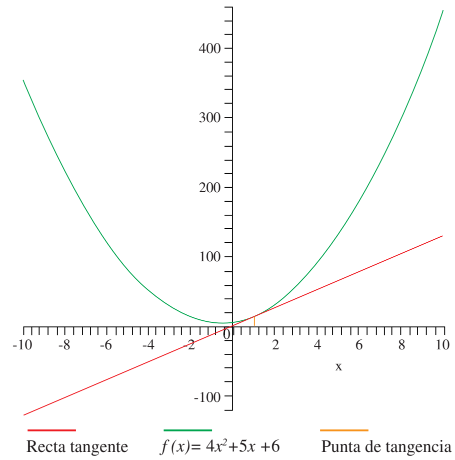
```
> ecrectag:=solve(13=(y-15)/(x-1),y);
```

$ecrectag := 13\,x + 2$

Grafique la función y la recta tangente a ella utilizando la biblioteca de Maple *with(student)* y el comando *showtangent*

```
> with(student):showtangent(f,x=1);
```

GRÁFICA 16



A continuación se dan algunas aplicaciones de la derivada en las ciencias económico administrativas.

EJEMPLO 1

Determine el costo marginal de $c = q^2 + 50q + 1000$ cuando $q = 15$, $q = 16$ y $q = 17$.

Grafique la función.

Los pasos a realizar son los siguientes:

1. Borre la memoria de Maple.
2. Derive la función con el comando *D()* para encontrar el costo marginal.
3. Evalúe la derivada en cada punto con el único fin de encontrar el valor del costo marginal cuando se producen q unidades.
4. Obtenga de la biblioteca de Maple el comando *plots* para graficar el costo y el costo marginal. Utilice en lugar de q la variable x para que se pueda graficar y establezca un dominio de -100 hasta 100, y el rango de -1000 a 1000.

■ PASO 1

```
> restart;
```

■ PASO 2

```
> c:=q->q^2+50*q+1000;
```

$$c := q \rightarrow q^2 + 50\,q + 1000$$

```
> D(c);
```

$$q \rightarrow 2\,q + 50$$

La función anterior representa el costo marginal.

■ PASO 3

```
> D(c)(15);
```

80

```
> D(c)(16);
```

82

```
> D(c)(17);
```

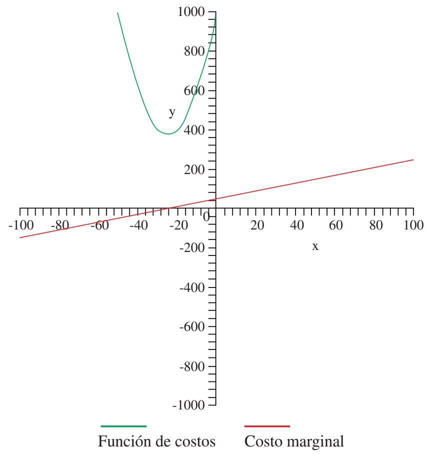
84

■ PASO 4

```
> with(plots):
```

```
> plot({x^2+50*x+1000,2*x+50},x=-100...100,y=-1000
...1000);
```

GRÁFICA 17



Observe que el costo es una curva de color verde y el costo marginal es una recta de color rojo, las cuales nunca se cruzan, luego entonces, no se cumple con la teoría económica de producción del mínimo costo. Todo lo contrario, cada vez que se aumenta una unidad de producción, el costo marginal aumenta.

EJEMPLO 2

Calcule el producto del ingreso marginal. Cuando

$$q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}}, \quad p = \frac{900}{q + 9}, \text{ y } m = 9 \text{ donde } m \text{ es el}$$

número de empleados a contratar, q la cantidad a producir y p el precio.

Los pasos a seguir en este caso son:

1. Cree la función q y p.
2. Multiplique la función p por q para obtener el ingreso.
3. Evalúe q cuando $m=9$, nombrando el valor con la letra a.

4. Nombre el resultado de *p* por *q*, el cual es el ingreso con la letra *r* como una función.
5. Derive la función ingreso para obtener la función de ingreso marginal.
6. Evalúe el ingreso marginal cuando $q = a$ y nómbrela por la letra *b*.
7. Calcule la derivada de *q* con respecto a *m*.
8. Evalúe la derivada de *q* con respecto a *m* cuando $m = 9$, nombrándola con la letra *c*.
9. Multiplique $b*c$ y al resultado llámelo *d*. El cual será el producto del ingreso marginal.
10. Finalmente, utilice el comando *evalf* para evaluar el producto del ingreso marginal numéricamente.

■ PASO 1

```
> q:=m->10*m^2/(m^2+19)^(1/2);
```

$$q := m \to \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}}$$

```
> p:=q->900/(q+9);
```

$$p := q \to \frac{900}{q + 9}$$

■ PASO 2

```
> p(q)*q;
```

$$\frac{900q}{q + 9}$$

La función anterior representa el ingreso.

■ PASO 3

```
> a:=q(9);
```

$$a := \frac{81\sqrt{100}}{10}$$

■ PASO 4

```
> r:=q->900*q/(q+9);
```

$$r := q \to \frac{900\,q}{q+9}$$

■ PASO 5

```
> D(r);
```

$$q \to \frac{900}{q+9} - \frac{900\,q}{(q+9)^2}$$

La función anterior expresa el ingreso marginal.

■ PASO 6

```
> b:=D(r)(a);
```

$$b := \frac{900}{\frac{81\sqrt{100}}{10}+9} - \frac{7290\sqrt{100}}{\left(\frac{81\sqrt{100}}{10}+9\right)^2}$$

■ PASO 7

```
> D(q);
```

$$C := \frac{1071\sqrt{100}}{1000}$$

■ **PASO 8**

```
> c:=D(q)(9);
```

$$C := \frac{1071\sqrt{100}}{1000}$$

■ **PASO 9**

```
> d:=b*c;
```

$$d := \frac{1071\left(\frac{900}{\frac{81\sqrt{100}}{10}+9} - \frac{7290\sqrt{100}}{\left(\frac{81\sqrt{100}}{10}+9\right)^2}\right)\sqrt{100}}{1000}$$

■ **PASO 10**

```
> evalf(d);
```

10.71000001

Con este resultado podemos decir que, dadas las funciones anteriores, cuando se contrata un trabajador adicional (el trabajador numero 10), se espera que el ingreso aumente aproximadamente en 10.7 unidades.

PRÁCTICA 3

1. Derivar las siguientes funciones:

a) $f(x) = (4x^2 - 6x)^3$ b) $f(x) = (x^3 + 2)(-2x^4 + 3x)$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{(6 - x^2)}}$ d) $f(x) = \ln(x^3 + x - 1)^4$

e) $f\left(x\right)=\left(-e^{-3x}+e^{3x}\right)^2$

2. Muestre la recta tangente a la curva para la siguiente función cuando *x* = 2 para

$$f\left(x\right)=x^2-5x+4$$

3. Encuentre la pendiente de la recta tangente de las siguientes funciones en los puntos dados:

a) $f\left(x\right)=-2x^2+3$ en $x=2$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $x=\dfrac{1}{2}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2+x}$ en $x=1$

Laboratorio 4

TEMAS ADICIONALES DE DIFERENCIACIÓN

En la presente sección se estudiarán algunas técnicas avanzadas de derivación; comenzaremos revisando la manera de obtener las segundas derivadas, terceras derivadas, y en general las enésimas derivadas de una función con el comando *diff* más el parámetro *$*. Después se procederá a examinar la manera de calcular las derivas implícitas de una función utilizando el comando *implicitdiff*, calculando también sus derivadas de orden superior; para finalizar el laboratorio se explicará el comando para graficar funciones implícitas *implicitplot*.

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

En el siguiente apartado se darán ejemplos de derivadas de orden superior. En otras palabras, encontrar la segunda, tercera, cuarta o enésima derivada de una función.

Se empezará como anteriormente se ha venido haciendo, borrando la memoria de Maple con el comando *restart*.

```
> restart;
```

Calcule la sexta derivada de la función

$$f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$$

Primero defina la función.

```
> f:=x->x^5-x^4+x^3-x^2+x-1;
```

$f := x \rightarrow x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

Encuentre la primera derivada de *f(x)*.

```
> diff(f(x),x);
```

$5\,x^4 - 4\,x^3 + 3\,x^2 - 2\,x + 1$

Ahora se resolverá la segunda derivada de *f(x)*. Para ello, después de mencionar la función a derivar, utilice la variable respecto a la cual derivar seguida del signo de pesos y el número 2, *x$2*, lo cual indica que se quiere obtener la segunda derivada, sin obtener la primera derivada.

```
> diff(f(x),x$2);
```

$20\,x^3 - 12\,x^2 + 6\,x - 2$

Obtenga la tercera derivada, siga derivando hasta que llegue a cero, lo cual indicará que es la enésima.

```
> diff(f(x),x$3);
```

$60\,x^2 - 24\,x + 6$

```
> diff(f(x),x$4);
```

$120\,x - 24$

```
> diff(f(x),x$5);
```

120

```
> diff(f(x),x$6);
```

0

Observe que la sexta derivada de *f(x)* es cero. Y a partir de este momento cualquier derivada de orden superior para esta función es cero.

DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

Existen formas de derivar funciones con ciertas características, en las cuales se pueden usar diversas técnicas que permitan simplificar o modificar las funciones para luego derivarlas. Tal es el caso de la derivación implícita.

La derivación implícita es una técnica usada para funciones que están expresadas implícitamente, en las cuales no está despejada la variable dependiente en función de la independiente, por ejemplo: $3x + y^2 = 4x^2 + y$. Aprenderá a utilizar el comando *implicitdiff* para diferenciar funciones de este tipo.

Utilice el comando *restart* para borrar la memoria del *software*.

```
> restart;
```

Diferencie la siguiente expresión $x^2 + y^2 - 4 = 0$, con respecto a x.

Utilice el comando *implicitdiff* donde el primer argumento de dicho comando es la ecuación como segundo argumento la variable dependiente y el tercer argumento la variable respecto a la cual derivar.

```
> implicitdiff(x^2+y^2-4=0,y,x);
```

$$-\frac{x}{y}$$

Ahora diferencie con respecto a y la siguiente expresión $x^3 + 4xy^2 - 27 = y^4$.

```
> implicitdiff(x^3+4*x*y^2-27=y^4,y,x);
```

$$-\frac{3x^2+4y^2}{4y(-y^2+2x)}$$

Resuelva el siguiente ejemplo. Encontrar la pendiente de la curva $x^3=\left(y-x^2\right)^2$ en *(1,2)*;

```
> restart;
```

```
> implicitdiff(x^3=(y-x^2)^2,y,x);
```

$$\frac{x(-3x-4y+4x^2)}{2(-y+x^2)}$$

Utilice el comando *subs* para sustituir los valores de *x* e *y*, para encontrar la pendiente.

```
> subs({x=1,y=2},%);
```

$$\frac{7}{2}$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR IMPLÍCITA

En el siguiente apartado se resolverán ejercicios para encontrar la enésima derivada de una función implícita. De hecho, es el mismo procedimiento que se hace con respecto a una variable, sólo que aquí se utiliza el comando *implicitdiff*.

Encuentre la segunda derivada de la expresión $x^2+4y^2=4$ respecto a *x*, evalúe cuando $x=4$ e $y=1$ utilizando el comando *implicitdiff* más el parámetro que indica el orden de derivación; después utilice el comando *eval* para evaluar el resultado en los valores dados.

```
> implicitdiff(x^2+4*y^2=4,y,x$2);
```

$$-\frac{x^2+4y^2}{16y^3}$$

```
> eval(%,[x=4,y=1]);
```

$$-\frac{5}{4}$$

Encuentre la tercera derivada de la expresión $\sqrt{x}+y^2=5$ respecto a x.

```
> implicitdiff(sqrt(x)+y^2=5,y,x$3);
```

$$-\frac{3\,(4\,y^4\,x^3-2\,x^{(7/2)}\,y^2+x^4)}{64\,y^5\,x^{(11/2)}}$$

GRAFICACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

En el siguiente apartado aprenderá a graficar funciones implícitas. Para poder graficar funciones implícitas, borre la memoria de Maple y llame la biblioteca de gráficos.

```
> restart;
```

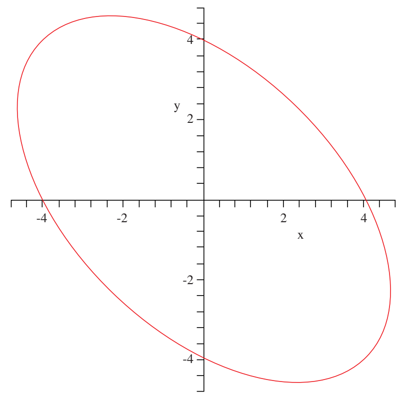
```
> with(plots);
```

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, filedplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implcitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrxplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, plygonplot, polygonplot3d, polyhedra_* *supported, polyhedraplot, rootlocus,seilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, extplot, textplot3d, tubeplot*]

Grafique la siguiente función $x^2 + xy + y^2 = 16$ con un dominio y codominio (o rango) de *-5* a *5*. Utilice el comando *implicitplot.*

> implicitplot(x^2+x*y+y^2=16,x=-5...5,y=-5...5);

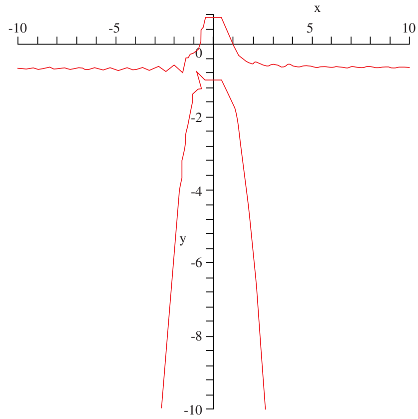
GRÁFICA 18



En el siguiente ejemplo se graficará la siguiente expresión $x^2 + 1.5yx^2 + y^2 = 1$, como se hizo en el ejemplo anterior.

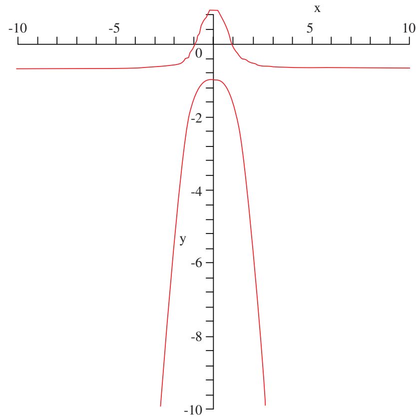
> implicitplot(x^2+1.5*y*x^2+y^2=1,x=-10...10,y=-10...10);

GRÁFICA 19



>implicitplot(x^2+1.5*y*x^2+y^2=1,x=-10...10,y=-10...10,grid=[50,50]);

GRÁFICA 20



Note que en este caso la gráfica es mucho más suave y nítida que la anterior, esto debido a la utilización del argumento *grid* que aumenta o disminuye la resolución de la gráfica.

PRÁCTICA 4

1. Encuentre las derivadas de orden superior que se piden a continuación.

a) $f'''(x)$ y $f''''(x)$ para $f(x) = 9x^4 - 4x^3 + 9$

b) $f''(x)$ y $f'''(x)$ para $f(x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{1+x}$

2. Grafique las siguientes funciones implícitas.

a) $3y^2 + 5xy = 18$

b) $3x^2 + 2y^3 + 5xy^2 + 6x^2 y = 6$

c) $\ln\left(x^3 y\right) + 5y^2 = 10$

3. Encuentre las siguientes derivadas implícitas, además localice la pendiente de la recta tangente en los puntos señalados.

c) $\dfrac{dy}{dx}$ para $y^2 + 5x = 20$ para $(0,0)$

b) $\dfrac{dy}{dx}$ para $\ln\left(y^2 x\right) + 5x = 7$ para $(1,-1)$

c) $\dfrac{dy}{dx}$ para $\left(2 + e^{2x}\right)^3 = 5 + \ln\left(3x^2 y\right)$ para $(e,1)$

d) $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$ para $5y = e^{-2x+y}$ para $(-e, e)$

Laboratorio 5

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En este laboratorio se aprenderá a calcular los intervalos donde la función es creciente y/o decreciente, así también el punto donde existen máximos y/o mínimos relativos con el criterio de la primera derivada utilizando el comando *CriticalPoints*. Además se estudiará cómo determinar los intervalos donde la función es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba, puntos de inflexión con el comando *InflectionPoints* y se comprobará con el criterio de la segunda derivada que existe un máximo o un mínimo.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

En el siguiente ejemplo $f(x) = 18x - \frac{2x^3}{3}$ se calcularán los intervalos donde la función es creciente o decreciente, así como si tiene un máximo o un mínimo con el criterio de la primera derivada, y después con la segunda derivada. Primero defina la función $f(x) = 18x - \frac{2x^3}{3}$.

```
> restart;
```

```
> f:=x->18*x-2/3*x^3;
```

$$f := x \to 18\,x - \frac{2}{3}x^3$$

Primero se encontrarán los puntos críticos. Para ello se utilizará la biblioteca *with(Student[Calculus1])*, y posteriormente el comando *CriticalPoints(f(x),x)*.

> with(Student[Calculus1]);

[AntiderivativePlot, AntiderivativeTutor, ApproximateInt, ApproximateIntTutor, ArcLength, ArcLengthTutor, Asymptotes, Clear, CriticalPoints, CurveAnalysisTutor, DerivativePlot, DerivativeTutor, DiffTutor, ExtremePints, FunctionAverage, FunctionAverageTutor, FunctionChart, FunctionPlot, GetMessage, GetNumProblems, GetProblem, Hint, InflectionPoints, IntTutor, Integrand, InversePlot, InverseTutor, LimitTutor, MeanValueTheorem, Mean ValueTheoremTutor, NewtonQuotient, NewtonsMethod, NewtonsMethodTutor, PointInterpolation, RiemannSum, RollesTheorem, Roots, Rule, Show, ShowIncomplete, ShowSteps, Summand, SurfaceOfRevolution, SurfaceOfRevolutionTutor, Tangent, TangentSecantTutor, TagentTutor, TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor, Understand, Undo, VolumeOfRevolution, VolumeOfRevolutionTutor, WhatProblem]

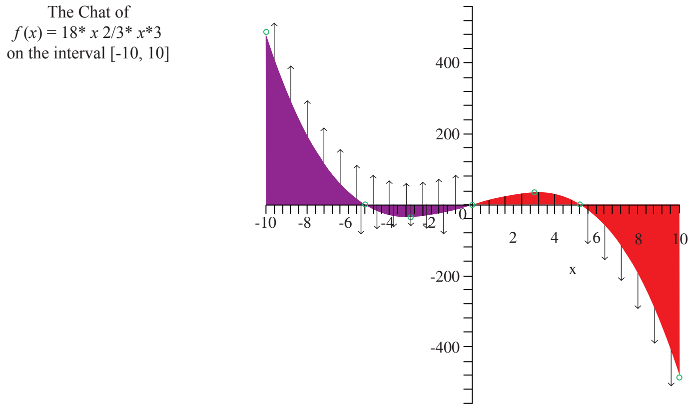
> CriticalPoints(f(x),x);

[-3, 3]

Ahora se graficará la función para conocer el intervalo donde la función es creciente o decreciente y si hay máximos o mínimos. Para ello se utilizará el comando *Functionchart(f(x))*.

> FunctionChart(f(x));

GRÁFICA 21



Observe que el gráfico arroja un intervalo por *default* de *(-10,10)*. Con ello determina dónde la función es decreciente o creciente. Se puede ver cómo se marca con una señal los puntos críticos. Apreciando que la función es decreciente de *(-infinity,-3)* y de *(3,infinity)*; creciente de *(-3,3)*. Con ellos se tiene un mínimo en $x = -3$. Para tener la coordenada hay que sustituir estos valores en la función original. Para eso evalué la función con el comando *eval()*.

> eval(f(x),x=-3),eval(f(x),x=3);

-36, 36

Luego entonces, la función tiene un mínimo relativo en *(-3,36)* y un máximo relativo *(3,36)*.

Además, con el gráfico se puede obtener la concavidad y el punto de inflexión. La concavidad de la función se muestra con flechas, por lo tanto, es cóncava hacia arriba en el intervalo *(-infinity,0)* y es cóncava hacia abajo de *(0,infinity)*.

Para determinar el punto de inflexión se utilizará el comando *InflectionPoints(f(x)),* el cual dará el valor de *x;* luego se sustituirá ese valor en *f(x)* para conocer el punto.

```
> InflectionPoints(f(x));
```

[0]

Ahora se sustituirá el valor en la función original para saber el valor de *f(x)*.

```
> eval(f(x),x=0);
```

0

Entonces hay un punto de inflexión en el punto *(0,0)*.

En el ejemplo siguiente calcule los intervalos donde la función es creciente, decreciente, donde hay máximos o mínimos, donde es cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba y puntos de inflexión de $f(x) = 4 + 3x - x^3$.

```
> restart;
```

```
> with(Student[Calculus1]);
```

[AntiderivativePlot, AntiderivativeTutor, ApproximateInt, ApproximateIntTutor, ArcLength, ArcLengthTutor, Asymptotes, Clear, CriticalPoints, CurveAnalysisTutor, DerivativePlot, DerivativeTutor, DiffTutor, ExtremePints, FunctionAverage, FunctionAverageTutor, FunctionChart, FunctionPlot, GetMessage, GetNumProblems, GetProblem, Hint, InflectionPoints, IntTutor, Integrand, InversePlot, InverseTutor, LimitTutor, MeanValueTheorem, Mean ValueTheoremTutor, NewtonQuotient, NewtonsMethod, NewtonsMethodTutor, PointInterpolation, RiemannSum, RollesTheorem, Roots, Rule, Show, ShowIncomplete, ShowSteps, Summand,

SurfaceOfRevolution, SurfaceOfRevolutionTutor, Tangent, TangentSecantTutor, TagentTutor, TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor, Understand, Undo, VolumeOfRevolution, VolumeOfRevolutionTutor, WhatProblem]

```
> f:=x->4+3*x-x^3;
```

$$f := x \rightarrow 4 + 3\ x - x^3$$

Se encontrarán los valores críticos de la función.

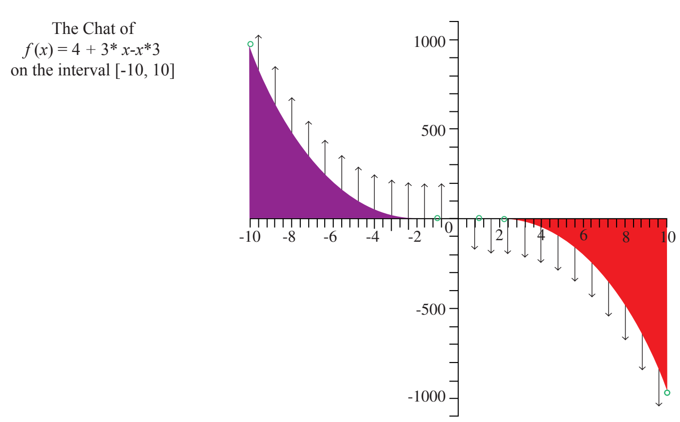
```
> CriticalPoints(f(x));
```

[-1, 1]

Ahora se graficará la función para conocer dónde es creciente, decreciente, máximo, mínimo, cóncava hacia abajo, cóncava hacia arriba y puntos de inflexión (para los puntos de inflexión recuerde utilizar el comando *InflectionPoints()*).

```
> FunctionChart(f(x));
```

GRÁFICA 22



> InflectionPoints(f(x));

[0]

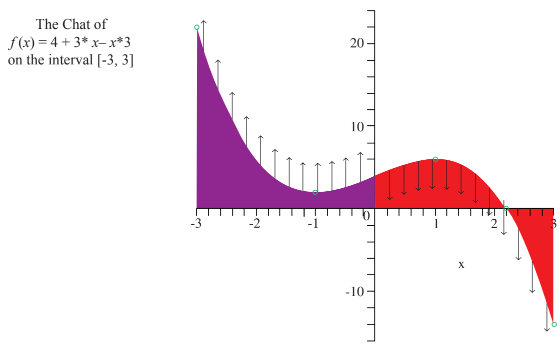
> eval(f(x),x=0);

4

Al parecer, la función según el gráfico es decreciente de *(-infinity,infinity)*. Sin embargo, hay un punto de inflexión en *(0,4)* lo que lleva a concluir que la función tiene máximos y mínimos que no se notan en el gráfico; para ello, debemos establecer el dominio más pequeño, pues no se puede establecer el codominio con este comando. Al establecer el dominio se reducirá el codominio. Establezca un dominio de *-3* a *3* con el comando *FunctionChart(f(x),-3...3)*.

> FunctionChart(f(x),-3...3);

GRÁFICA 23



Luego entonces, la función es decreciente en el intervalo de *(-infinity,-1)* y de *(1,infinity)*; creciente en el intervalo *(-1,1)*. Es cóncava hacia arriba en *(-infinity,0)* y cóncava hacia abajo en *(0,infinity)* con un punto de inflexión en *(0,4)*.

EXTREMOS ABSOLUTOS

Para determinar el máximo o mínimo absoluto se deberá calcular los valores críticos y sustituir en la función, y el mayor de ellos será el máximo absoluto y el menor es el mínimo absoluto.

```
> restart;

> with(Student[Calculus1]);with(plots);
```

[*AntiderivativePlot, AntiderivativeTutor, ApproximateInt, ApproximateIntTutor, ArcLength, ArcLengthTutor, Asymptotes, Clear, CriticalPoints, CurveAnalysisTutor, DerivativePlot, DerivativeTutor, DiffTutor, ExtremePints, FunctionAverage, FunctionAverageTutor, FunctionChart, FunctionPlot, GetMessage, GetNumProblems, GetProblem,Hint, InflectionPoints, IntTutor, Integrand, InversePlot, InverseTutor, LimitTutor, MeanValueTheorem, Mean ValueTheoremTutor, NewtonQuotient, NewtonsMethod, NewtonsMethodTutor, PointInterpolation, RiemannSum, RollesTheorem, Roots, Rule, Show, ShowIncomplete, ShowSteps, Summand, SurfaceOfRevolution, SurfaceOfRevolutionTutor, Tangent, TangentSecantTutor, TagentTutor, TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor, Understand, Undo, VolumeOfRevolution, VolumeOfRevolutionTutor, WhatProblem*]

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, filedplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implcitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot,*

listplot3d, loglogplot, logplot, matrxplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, plygonplot, polygonplot3d, polyhedra_ supported, polyhedraplot, rootlocus,seilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, extplot, textplot3d, tubeplot]

Encontrar los extremos absolutos para la siguiente función $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo cerrado *[1,4]*.

> f:=x->x^2-4*x+5;

$f := x \rightarrow x^2 - 4\,x + 5$

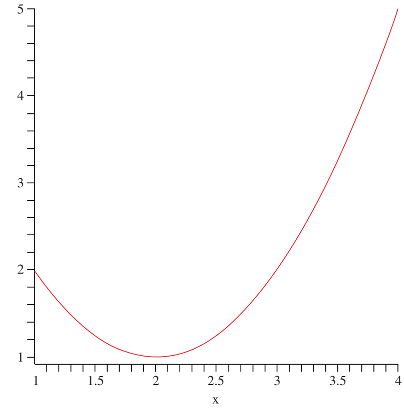
> CriticalPoints(f(x));

[2]

Como sólo se necesita la gráfica en el intervalo *[1,4]*, se graficará con este intervalo

> plot(f(x),x=1...4);

GRÁFICA 24



Ahora se sustituyen los valores $x=1$, $x=2$ y $x=4$ en la función dada

```
> f(1);
```

$$2$$

```
> f(2);
```

$$1$$

```
> f(4);
```

$$5$$

Por lo tanto, los valores de *f* en los puntos extremos son *f(1)=2* y *f(4)=5*; el valor crítico en *2* es *f(2)=1*. Entonces se concluye que el máximo absoluto es *f(4)=5* y el mínimo absoluto es *f(2)=1*.

PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA

Ahora se calculará los máximos y/o mínimos de una función con la prueba de la segunda derivada. Recuerde que si la segunda derivada es mayor a cero es un mínimo relativo y si es menor a cero es un máximo relativo.

Calcule si $f(x)=18x-\frac{2x^3}{3}$ tiene máximos y/o mínimos relativos con la prueba de la segunda derivada.

Creé la función y grafíquela.

```
> restart;
```

```
> with(plots);
```

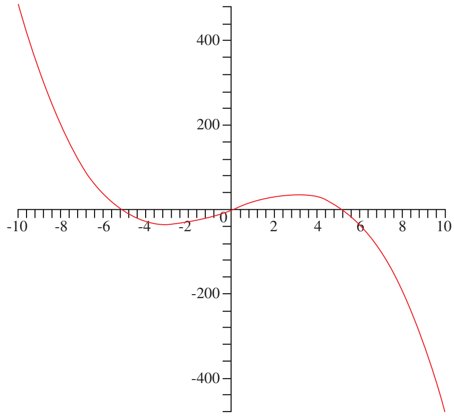
[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, filedplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implcitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrxplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, plygonplot, polygonplot3d, polyhedra_ supported, polyhedraplot, rootlocus,seilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, extplot, textplot3d, tubeplot*]

```
> f:=x->18*x-2/3*x^3;
```

$$f := x \rightarrow 18\,x - \frac{2}{3}\,x^3$$

```
> plot(f(x),x=-10...10);
```

GRÁFICA 25



Con el comando *fsolve(D(f))* encuentre donde la primera derivada se hace cero.

```
> fsolve(D(f)(x)=0,x=-6...8);
```

-3.000000000 , 3.000000000

Sustituya los valores en la segunda derivada para conocer su signo y determinar si hay un máximo o mínimo relativo.

```
> D(D(f))(-3);
```

12

```
> D(D(f))(3);
```

-12

Por lo tanto, existe un mínimo relativo en $x=-3$ y un máximo relativo en $x=3$.

EJERCICIO PRÁCTICO

Suponga la ecuación de demanda para el producto de un monopolista que es $p=400-2q$ y que la función de costo promedio es $cm=0.2q+4q+\dfrac{400}{q}$ donde q es el número de unidades, p y cm se expresan en dólares por unidad.

1. Determine el nivel de producción en el que se maximiza la utilidad.
2. Determine el precio en que ocurre la utilidad máxima.
3. Determine la utilidad máxima
4. Si como medida reguladora el gobierno impone un impuesto de *\$22* por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?

■ PASO 1

```
> p:=q->400-2*q;
```

$$p := q \rightarrow 400 - 2\,q$$

```
> cm:=q->0.2*q+4+400/q;
```

$$cm := q \rightarrow 0.2\,q + 4 + \frac{400}{q}$$

```
> c:=cm(q)*q;
```

$$c := \left(0.2\,q + 4 + \frac{400}{q}\right) q$$

```
> factor(%);
```

$$0.2\,q^2 + 4.000000000q + 400.0000000$$

```
> r:=p(q)*q;
```

$$r := (400 - 2\,q)\,q$$

```
> expand(%);
```

$$400\,q - 2\,q^2$$

```
> u:=r-c;
```

$$u := (400 - 2\,q)\,q - \left(0.2\,q + 4 + \frac{400}{q}\right) q$$

```
> expand(%);
```

$$396\,q \rightarrow 2.2\,q^2 - 400$$

```
> with(plots):
```

```
> U:=x->396*x-2.2*x^2-400;
```

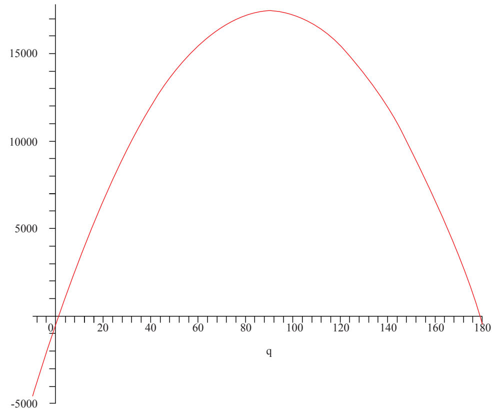
$$U := x \rightarrow 396\,x - 2.2\,x^2 - 400$$

```
> fsolve(D(U)(x)=0,x=-10..100);
```

90

```
> plot(U(x),x=0...178.9841661);
```

GRÁFICA 26




```
> fsolve(U(x));
```

1.015833891,178.984166

■ **PASO 2**

```
> p(90);
```

220

■ PASO 3

```
> U(90);
```

17420

■ PASO 4

```
> c1:=c+22*q;
```

$$c1 := \left(0.2\,q + 4 + \frac{400}{q}\right) q + 22\,q$$

```
> u2:=r-c1;
```

$$u2 := (400 - 2\,q)\,q - \left(0.2\,q + 4 + \frac{400}{q}\right) q - 22\,q$$

```
> expand(%);
```

$$374\,q - 2.2\,q^2 - 400$$

```
> U2:=q->374*q-2.2*q^2-400;
```

$$U2 := q \rightarrow 374\,q - 2.2\,q^2 - 400$$

```
> fsolve(D(U2)(q)=0);
```

85.

```
> D(D(U2))(85);
```

–4.4

```
> U2(85);
```

15495

A un precio de *220* y produciendo q = 90 alcanza la máxima utilidad con *17420*; sin embargo, cuando viene el impuesto tiene que producir menos, o sea, *85* y alcanza sólo la utilidad de *15495*.

PRÁCTICA 5

1. Para las siguientes funciones encuentre a) intervalos dónde la función es creciente y decreciente, b) máximos y mínimos relativos, c) intervalos donde la función es cóncava hacia abajo y cóncava hacia arriba y d) puntos de inflexión.

a) $f(x)=2x^2-9x^2+12x$ b) $f(x)=x^4+x^3+4x^2$

c) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x-8)$ d) $f(x)=4x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{4}{3}}$

2. Encuentre los extremos absolutos en los intervalos dados para las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{7}{3}x^3+2x^2-3x+1,\quad en\quad [0,3]$

b) $f(x)=\frac{x}{x^2+1},\quad en\quad [0,2]$

c) $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}},\quad en\quad [-26,28]$

3. El costo de producir *q* unidades de un artículo está dado por $c(q)=3q^2+50q-18q\ln q+120$. Determine el número de unidades que deben producirse para minimizar el costo promedio y calcule dichos costos promedio mínimo.

Laboratorio 6

INTEGRALES

En esta sección se aprenderán los comandos básicos que nos permiten integrar indefinidamente funciones algebraicas con los comandos *Int*, *int*, *Integrate* e *integrate*; se revisará la manera de calcular integrales definidas con los comandos *int* e *integrate*; se analizará la forma obtener el área bajo la curva o el área entre curvas; y finalmente se evaluará las sumas de Riemann utilizando los comandos *rightsum*, *leftsum*, *rightbox* y *leftbox*.

LA INTEGRAL INDEFINIDA

El comando *Integrate* (o en su forma alternativa *Int*) nos muestra la integral con el símbolo sólo del operador; en cambio, el comando *integrate* (o en su forma alternativa *int*) resuelve la integral directamente. Daremos a continuación algunos ejemplos:

```
> restart;
```

```
> Integrate(5,x);
```

$$\int 5\, dx$$

```
> integrate(5,x);
```

$$5\, x$$

```
> Integrate(8+u,u)=integrate(8+u,u);
```

$$\int 8+u\,du = 8\,u+\frac{1}{2}\,u^2$$

```
> integrate(w,w);
```

$$\frac{w^2}{2}$$

```
> int(x,x);
```

$$\frac{x^2}{2}$$

```
> Int(x,x);
```

$$\int x\,dx$$

```
> Integrate(x,x);
```

$$\int x\,dx$$

```
> restart;
```

```
> Int(1/(4*x^(2/8)),x)=integrate(1/(4*x^(2/8)),x);
```

$$\int \frac{1}{4\,x^{(1/4)}}\,dx = \frac{x^{(3/4)}}{3}$$

```
> int((2*u+1)^2,u);
```

$$\frac{(2\,u+1)^3}{6}$$

Expresemos ahora el resultado anterior como un polinomio,

```
> expand(%);
```

$$\frac{4}{3}u^3 + 2\,u^2 + u + \frac{1}{6}$$

```
> int((z^4+10*z^3)/(2*z^2),z);
```

$$\frac{1}{6}z^3 + \frac{5}{2}z^2$$

```
> Int((z^4+10*z^3)/(2*z^2),z);
```

$$\int \frac{z^4 + 10\,z^3}{2\,z^2}\,dz$$

```
> int((exp(x)+exp(2*x))/exp(x),x);
```

$$x + \mathbf{e}^x$$

En los ejemplos anteriores los resultados no muestran la constante de integración “*c*”. Por tal motivo, al resultado anterior le sumamos la constante de integración a continuación, para que se resuelva como una integral con condiciones iniciales. Luego entonces de acuerdo a la siguiente condición *y(0)=0* encontrar *y*

```
> %+c;
```

$$x + \mathbf{e}^x + c$$

```
> f:=x->x+exp(x)+c;
```

$$f := x \rightarrow x + \mathbf{e}^x + c$$

```
> f(0);
```

$$1 + c$$

```
> solve(1+c,c);
```

-1

Se muestra a continuación una serie de ejercicios donde se manipula la presentación de la respuesta para visualizar el uso de alguna regla de integración.

```
> int((x+1)^20,x);
```

$$\frac{(x+1)^{21}}{21}$$

```
> int((3*x^2)*(x^3+7)^3,x);
```

$$\frac{1}{4}x^{12}+7\,x^9+\frac{147}{2}x^6+343\,x^3$$

```
> factor(%);
```

$$\frac{x^3\,(x^3+14)\,(x^6+14\,x^3+98)}{4}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{x^3\,(x^3+14)\,(x^6+14\,x^3+98)}{4}$$

Ahora se muestra la evaluación, en particular de algunas integrales empleando los dos comandos, que se resuelven usando las fórmulas básicas de integración.

```
> Int((3*x^2)*(x^3+7)^3,x)=int((3*x^2)*(x^3+7)^3,x);
```

$$\int 3\,x^2\,(x^3+7)^3\,dx=\frac{1}{4}x^{12}+7\,x^9+\frac{147}{2}x^6+343\,x^3$$

```
> Int(x*(x^2+5)^(1/2),x)=int(x*(x^2+5)^(1/2),x);
```

$$\int \sqrt{x^2+5}\, dx = \frac{(x^2+5)^{(3/2)}}{3}$$

```
> Int((4*x+1)^2,x)=int((4*x+1)^2,x);
```

$$\int (4\,x+1)^2\, dx = \frac{(4\,x+1)^3}{12}$$

```
> Int((2*x^3+3*x)/(x^4+3*x^2+7)^4,x)=int((2*x^3+3*x)/
x^4+3*x^2+7)^4,x);
```

$$\int \frac{2\,x^3+3\,x}{(x^4+3\,x^2+7)^4}\, dx = -\frac{1}{6\,(x^4+3\,x^2+7)^3}$$

```
> Int((4*x^2)*(x^4+1)^2,x)=int((4*x^2)*(x^4+1)^2,x);
```

$$\int 4\,x^2\,(x^4+1)^2\, dx = \frac{4}{11}\,x^{11} + \frac{8}{7}\,x^7 + \frac{4}{3}\,x^3$$

```
> Int(2*x*exp(x^2),x)=int(2*x*exp(x^2),x);
```

$$\int 2\,x\,\mathbf{e}^{(x^2)}\, dx = \mathbf{e}^{(x^2)}$$

```
> Int((x^2+1)*exp(x^3+3*x),x)=int((x^2+1)*exp(x^3+3*
x),x);
```

$$\int (x^2+1)\,\mathbf{e}^{(x^3+3\,x)}\, dx = \frac{1}{3}\,\mathbf{e}^{(x^3+3\,x)}$$

```
> Int(7/x,x)=int(7/x,x);
```

$$\int \frac{7}{x}\, dx = 7\,\ln(x)$$

```
> Int(2*x/(x^2+5),x)=int(2*x/(x^2+5),x);
```

$$\int \frac{2\,x}{x^2+5}\,dx = \ln(x^2+5)$$

```
> Int((2*x^3+3*x)/(x^4+3*x^2+7),x)=int((2*x^3+3*x)/
(x^4+3*x^2+7),x);
```

$$\int \frac{2\,x^3+3\,x}{x^4+3\,x^2+7}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^4+3\,x^2+7)$$

```
> Int((1/(1-w)^2)+(1/(w-1)),w)=int(((1/(1-w)^2)+(1/(w-
1)),w));
```

$$\int \frac{1}{(1-w)^2}+\frac{1}{w-1}\,dw = \frac{1}{1-w}+\ln\,(w-1)$$

Ahora se muestra una serie de comandos con expresiones complejas a integrar, además se puede comprobar que su expresión, al derivarla, es igual que el integrando de la integral inicial.

```
> Int(((x+1)/(x^2+2*x))*ln(x^2+2*x),x)=int(((x+1)/
(x^2+2*x))*ln(x^2+2*x),x);
```

$$\int \frac{(x+1)\ln(x^2+2\,x)}{x^2+2\,x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x+2)\ln(x^2+2\,x)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(2)\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{4}\ln(x+2)^2+\frac{1}{2}\ln(x)\ln(x^2+2\,x)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(x)\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{1}{4}\ln(x)^2$$

```
> diff(rhs(%),x);
```

$$\frac{1}{2}\frac{\ln(x^2+2x)}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{\ln(x+2)(2x+2)}{x^2+2x}-\frac{1}{2}\frac{\ln(2)}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\ln(x+2)}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{\ln(x^2+2x)}{x}+\frac{1}{2}\frac{\ln(x)(2x+2)}{x^2+2x}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)}{x}-\frac{1}{4}\frac{\ln(x)}{\frac{x}{2}+1}-\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x}$$

El resultado anterior es en cierto modo complicado y susceptible de simplificación, por lo cual se normalizará la solución y al mismo tiempo se utilizará el comando *expanded* para reducir tanto el numerador como el denominador del polinomio y después simplificarlo.

```
> normal(%,'expanded');
```

$$\frac{\ln(x^2+2x)x+\ln(x^2+2x)}{x^2+2x}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{\ln(x(x+2))(x+1)}{x(x+2)}$$

Se muestran algunos comandos que verifican algunas reglas de integración.

```
> Int((x^3+x)/x^2,x)=int((x^3+x)/x^2,x);
```

$$\int\frac{x^3+x}{x^2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\ln(x)$$

```
> Int((2*x^3+3*x^2+x+1)/(2*x+1),x)=int((2*x^3+3*x^2
+x+1)/(2*x+1),x);
```

$$\int \frac{2\,x^3+3\,x^2+x+1}{2\,x+1}\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(2\,x+1)$$

```
> restart;
```

```
> Int((x^(1/2)-2)^(-3)/(x^(1/2)),x)=int((x^(1/2)-2)^(-3)/
(x^(1/2)),x);
```

$$\int \frac{1}{(\sqrt{x}-2)^3\,\sqrt{x}}\,dx=-\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

```
> Int(2^(3-x),x)=int(2^(3-x),x);
```

$$\int 2^{(3-x)}\,dx=-\frac{2^{(3-x)}}{\ln(2)}$$

```
> diff(rhs(%),x);
```

$$2^{(3-x)}$$

INTEGRAL DEFINIDA

Se describe un método de aproximación a una integral definida, empleando sumas inferiores y superiores de Riemann, valiéndose de herramientas del Maple.

```
> restart;with(student):with(plots):
```

warning, the name changecoords has been redefines

Para la siguiente función $f(x)=x^2+3$ desarrollar los siguientes pasos:

1. Graficar *f(x)* para valores positivos de *x*.

2. Graficar los rectángulos por abajo de la grafica para x desde *0* hasta *4* usando *8* rectángulos.
3. Calcular la suma de los rectángulos.
4. Incrementar el número de rectángulos a *16* y repetir los pasos *2* y *3*.
5. Incrementar el número de rectángulos a *128* y repetir los pasos *2* y *3*. ¿Qué pasa con el área cuando se incrementa el número de rectángulos?
6. Resuelve la integral definida *f(x)* para *x* desde *0* hasta *4*.
7. Repite los pasos *1* hasta *6* graficando ahora los rectángulos por arriba de la gráfica.
8. ¿Cuál es su respuesta a esta comparación?

   Primero definimos la función

```
> f:=x->x^2+3;
```

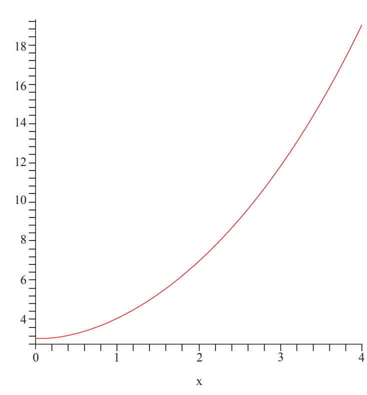
$$f := x \rightarrow x^2 + 3$$

■ PASO 1

Se graficará *f(x)* para valores positivos de *x*, tomando *x* de *0* a *4*, usando un trazo de color rojo para la curva.

```
> plot(f(x),x=0..4,color=red);
```

GRÁFICA 27

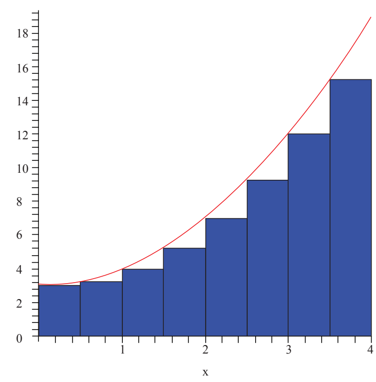


■ PASO 2

Se grafican los rectángulos por abajo de la curva para *x* desde *0* hasta *4* usando *8* rectángulos, marcando éstos de color azul.

```
> leftbox(f(x),x=0..4,8,color=red,shading=blue);
```

GRÁFICA 28



■ PASO 3

Se calcula la suma de los *8* rectángulos anteriores.

```
> leftsum(f(x),x=0..4,8);
```

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{7}\left(\frac{i^2}{4}+3\right)\right)$$

Se calcula un valor aproximado de la integral.

```
> evalf(%);
```

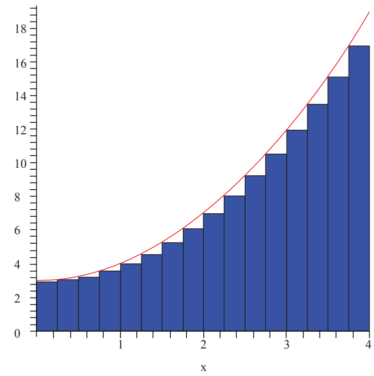
29.50000000

■ PASO 4

Se incrementa el número de rectángulos a *16* y se repite los pasos *2* y *3*.

> leftbox(f(x),x=0..4,16,color=red,shading=blue);

GRÁFICA 29



> leftsum(f(x),x=0..4,16);

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{15}\left(\frac{i^2}{16}+3\right)\right)$$

> evalf(%);

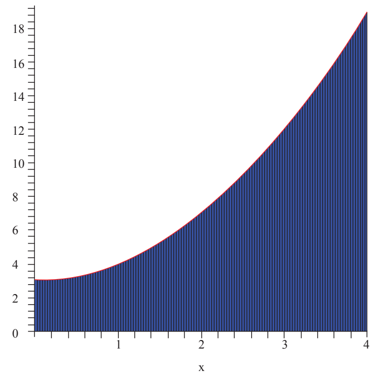
31.37500000

■ PASO 5

Se incrementa el número de rectángulos a *128* y se repiten los pasos *2* y *3*.

> leftbox(f(x),x=0..4,128,color=red,shading=blue);

GRÁFICA 30



Se calcula la suma de los rectángulos empleando *128*, así como su valor aproximado.

> leftsum(f(x),x=0..4,128);

$$\frac{1}{32}\left(\sum_{i=0}^{127}\left(\frac{i^2}{1024}+3\right)\right)$$

> evalf(%);

33.08398438

■ PASO 6

Resuelve la integral definida *f(x)* para *x* desde *0* hasta *4*.

> Int(f(x),x=0..4)=int(f(x),x=0..4);

$$\int_0^4 x^2+3\,dx=\frac{100}{3}$$

Se obtiene el valor aproximado de esta integral.

> evalf(rhs(%));

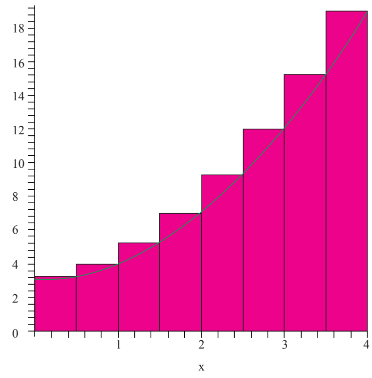
33.33333333

■ PASO 7

Se repiten los pasos del *1* hasta *6* graficando ahora los rectángulos por arriba de la gráfica y usando el color magenta para los rectángulos.

> rightbox(f(x),x=0..4,8,color=green,shading=magenta);

GRÁFICA 31



> rightsum(f(x),x=0..4,8);

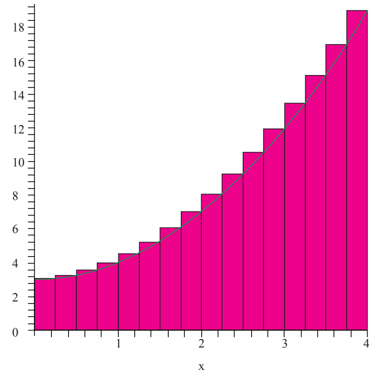
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{i^2}{4}+3\right)\right)$$

> evalf(%);

37.50000000

> rightbox(f(x),x=0..4,16,color=green,shading=magenta);

GRÁFICA 32



> rightsum(f(x),x=0..4,16);

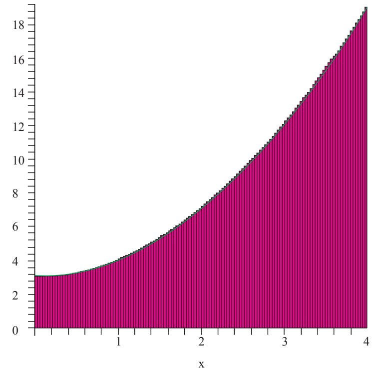
$$\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{16}\left(\frac{i^2}{16}+3\right)\right)$$

> evalf(%);

35.37500000

> rightbox(f(x),x=0..4,128,color=green,shading=magenta);

GRÁFICA 33



```
> rightsum(f(x),x=0..4,128);
```

$$\frac{1}{32}\left(\sum_{i=1}^{128}\left(\frac{i^2}{1024}+3\right)\right)$$

```
> evalf(%);
```

33.58398438

```
> Int(f(x),x=0..4)=int(f(x),x=0..4);
```

$$\int_0^4 x^2+3\,dx=\frac{100}{3}$$

```
> evalf(rhs(%));
```

33.33333333

■ PASO 8

¿Cuál es su respuesta a esta comparación? Conforme aumenta el número de rectángulos, ya sea por abajo de la curva o por arriba, se obtiene la misma área.

Se limpiará la pantalla y se reinicia una sección de trabajo para mostrar algunos ejemplos de la integral definida calculados directamente.

```
> restart;
```

A continuación desarrollaremos algunos ejemplos más para ilustrar el uso de la integral definida.

```
> Int(7,x=0..2)=int(7,x=0..2);
```

$$\int_0^2 7\,dx=14$$

```
> Int(x^2*(7*x^3+1)^(1/3),x=0..1)=int(x^2*(7*x^3+1)^(1/3),x=0..1);
```

$$\int_0^1 x^2\,(7\,x^3+1)^{(1/3)}\,dx = \frac{15}{28}$$

```
> evalf(rhs(%));
```

0.5357142857

```
> Int((x^6+6*x^4+x^3+8*x^2+x+5)/(x^3+5*x+1),x = 0 .. 2) =int((x^6+6*x^4+x^3+8*x^2+x+5)/(x^3+5*x+1),x = 0 .. 2);
```

$$\int_0^2 \frac{x^6+6\,x^4+x^3+8\,x^2+x+5}{x^3+5\,x+1}\,dx = 6+\ln(19)$$

ÁREA BAJO LA CURVA

Ahora se analizará el área bajo la curva. Primero se llamará la biblioteca *plots* para poder graficar la función:

$$\int_{-3}^{2} 6 - x - x^2 dx$$

```
> restart;with(plots):
```

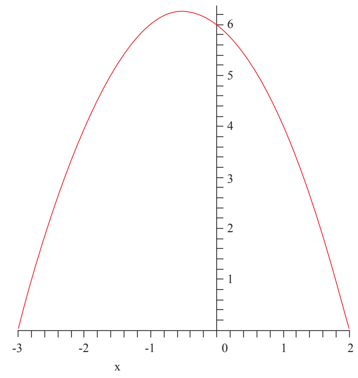
```
> Int(6-x-x^2,x=-3..2)=int(6-x-x^2,x=-3..2);
```

El resultado es el área bajo la curva $\int_{-3}^{2} 6 - x - x^2 dx = \frac{12}{6}$

Ahora se grafica la función con el comando *plot*:

```
> plot(6-x-x^2,x=-3..2);
```

GRÁFICA 34



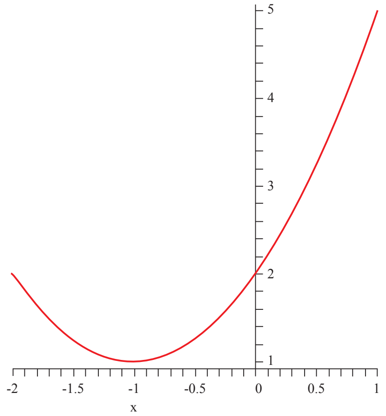
Ahora se muestran otro ejemplo de área bajo la curva.

```
> Int(x^2+2*x+2,x=-2..1)=int(x^2+2*x+2,x=-2..1);
```

$$\int_{-2}^{1} x^2 + 2x + 2dx = 6$$

```
> plot(x^2+2*x+2,x=-2..1);
```

GRÁFICA 35



ÁREA ENTRE CURVAS

A continuación se encontrará el área entre dos curvas: $y = x^2 - 5 + x + 7$, $y = 4$ y los puntos $x = 1$ y $x = 4$

> restart;with(plots):

warning, the name changecoords has been redefines

Sea $f(x) = 4$ y $g(x) = x^2 - 5x + 7$ y calcularemos a continuación el área entre las dos curvas.

> f:=4;

$f := 4$

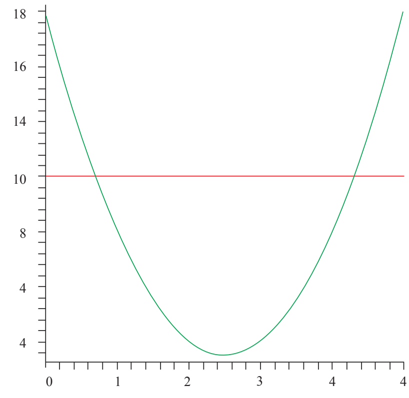
> g:=x^2-5*x+7;

$g := x^2 - 5\,x + 7$

Grafique las funciones *f* y *g* con un dominio de *0* a *5*.

> plot({f,g},x=0..5);

GRÁFICA 36



Se encuentra el área entre las dos curvas, restando la superior a la inferior.

> Area:=Int(f-g,x=1..4);

$$Area := \int_{1}^{4} -3 - x^2 + 5\,x\,dx$$

Utilice el comando *value* para conocer el valor del área.

> value(%);

$$\frac{15}{2}$$

Aquí otro ejemplo. Encuentre el área entre las curvas $y = x^2 - x - 2$, $y = 0$.

> f:=x->x^2-x-2;

$$f := x \rightarrow x^2 - x - 2$$

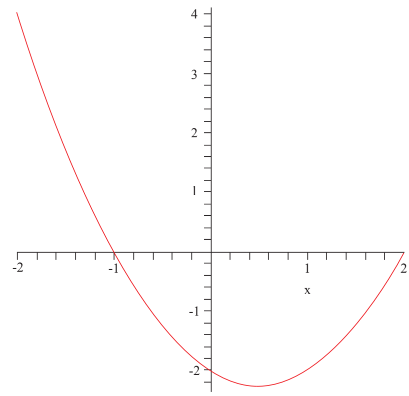
> g:=y->0;

$$g := y \rightarrow 0$$

Se grafican la función *f(x)* con un dominio de *-2* a *2*. Se observa que la función se intercepta con el eje *x* en *-1* y *2,* los cuales serán los límites del área. Sin embargo, el área está por debajo del eje *x*. Por lo tanto, por propiedades de la integral definida le debe anteceder un signo negativo a la integral.

> plot(f(x),x=-2..2);

GRÁFICA 37



> Area:=-Int(x^2-x-2,x=-1..2);

$$Area := \int_{-1}^{2} x^2 - x - 2\, dx$$

> value(%);

$$\frac{19}{3}$$

Desarrollaremos a continuación otro ejemplo, sólo que se cambiará el color de las gráficas. De este modo graficaremos primero las funciones y luego calcularemos el área entre las curvas. Sean las funciones $f(x)=2x+5$ y $g(x)=x^2+2$.

> restart:

> with(plots):

g:= x -> x^2 + 2;

$$g := x \rightarrow x^2 + 2$$

```
> f:= x -> 2*x + 5;
```

$$f := x \rightarrow 2\,x + 5$$

Ahora se grafican las funciones con los colores que tiene el Maple; se escogerán rojo (red) y café (brown). Usted puede escoger el color que más desee.

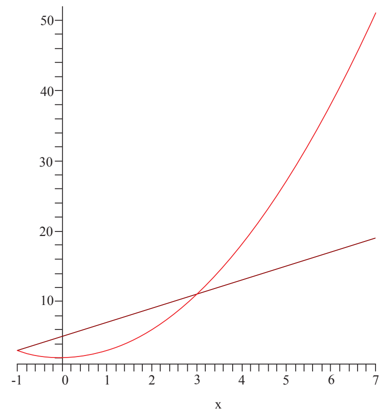
```
> a:= plot(g(x), x = -1..7, color = red):
```

```
> b:= plot(f(x), x = -1..7, color = brown):
```

Se utiliza el comando *display* para graficar las funciones.

```
> display({a,b});
```

GRÁFICA 38



Para encontrar el área bajo las curvas debemos encontrar los valores donde se cruzan las funciones. Para eso se utiliza el comando *solve* para encontrar las intersecciones de los puntos de las curvas.

```
> solve(x^2+2-2*x-5,x);
```

$3, -1$

El área entre las curvas desde *x=-1* hasta *x=3* es

$$\int_{-1}^{3} 2x + 5 - x^2 - 2dx$$

```
> int(2*x+5-x^2-2,x=-1..3);
```

$$\frac{32}{3}$$

Ahora encontraremos el área entre las funciones $f(x) = 4x - x^2 + 8$ y $g(x) = x^2 - 2x$.

```
> restart;with(plots):
```

warning, the name changecoords has been redefines

```
> f:=x->4*x-x^2+8;
```

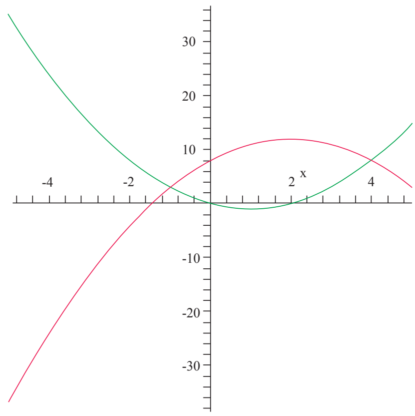
$$f := x \to 4\,x - x^2 + 8$$

```
> g:=x->x^2-2*x;
```

$$g := x \to x^2 - 2\,x$$

```
> plot({f(x),g(x)},x=-5..5);
```

GRÁFICA 39



> solve(f(x)-g(x),x);

$-1, 4$

> f(x)-g(x);

$6\,x-2\,x^2+8$

> sort(%,x);

$-2\,x^2+6\,x+8$

> h:=x->-2*x^2+6*x+8;

$h := x \rightarrow -2\,x^2+6\,x+8$

> int(h(x),x=-1..4);

$\frac{125}{3}$

Ahora calcularemos el área entre las curvas definidas por $y = \sqrt{x}$ y $y = x$. Definimos y graficamos a continuación cada una de las funciones anteriores,

```
> restart;with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

```
> f:=x->x^(1/2);
```

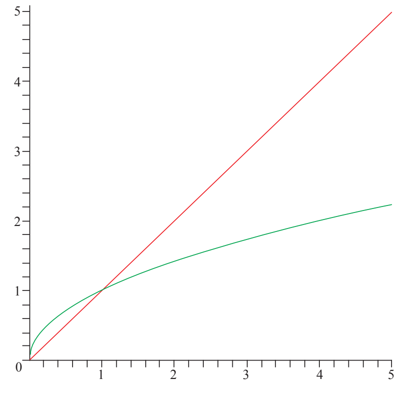
$$f := x \rightarrow \sqrt{x}$$

```
> g:=x->x;
```

$$g := x \rightarrow x$$

```
> plot({f(x),g(x)},x=0..5);
```

GRÁFICA 40



Encontramos ahora los puntos de intersección de ambas curvas,

```
> solve(f(x)-g(x),x);
```

0, 1

Y finalmente calculamos el área pedida, toda vez que los límites de integración ya están calculados:

```
> f(x)-g(x);
```

$\sqrt{x} - x$

```
> h:=x->x^(1/2)-x;
```

$h := x \rightarrow \sqrt{x} - x$

```
> int(h(x),x=0..1);
```

$\frac{1}{6}$

Encontremos ahora el área entre las curvas $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = x^2 + 1$. Como en el ejemplo anterior, definimos y graficamos a continuación cada una de las funciones anteriores,

```
> restart;with(plots):
```

```
> f:=x->9-x^2;
```

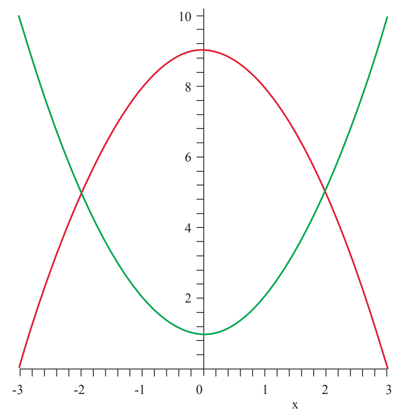
$f := x \rightarrow 9 - x^2$

```
> g:=x->x^2+1;
```

$g := x \rightarrow x^2 + 1$

```
> plot({f(x),g(x)},x=-3..3);
```

GRÁFICA 41



Ahora encontramos los puntos de intersección de ambas curvas.

```
> solve(f(x)-g(x),x);
```

$-2, 2$

Y por último, calculamos el área pedida, toda vez que los límites de integración ya están calculados.

```
> h:=f(x)-g(x);
```

$h := 8 - 2\,x^2$

```
> Int(h,x=-2..2)=int(h,x=-2..2);;
```

$$\int_{-2}^{2} 8 - 2\,x^2\,dx = \frac{64}{3}$$

Finalmente, en el siguiente ejemplo, calcularemos el área entre curvas con respecto al eje y. Calcular el área entre las curvas $y=\sqrt{4x}$ y $x=3$. Definimos y graficamos a continuación cada una de las funciones anteriores, pero ahora tomamos el eje y como referencia, por lo cual realizamos los despejes correspondientes,

```
> restart;with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

```
> f:=x->(4*x)^(1/2);
```

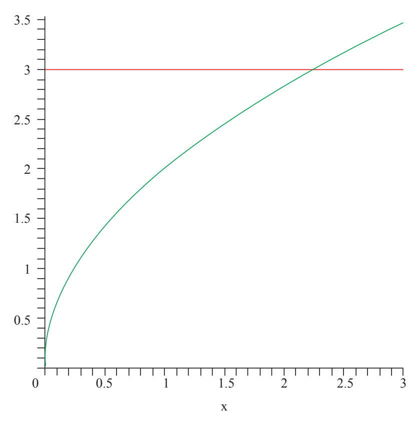
$$f := x \rightarrow \sqrt{4}\,\sqrt{x}$$

```
> g:=x->3;
```

$$g := x \rightarrow 3$$

```
> plot({f(x),g(x)},x=0..3);
```

GRÁFICA 42



Ahora se despejara x de la función $y = \sqrt{4x}$.

```
> j:=solve(y=sqrt(4*x),x);
```

$$j := \frac{y^2}{4}$$

Y para concluir el ejercicio, calculamos el área pedida, ya que los límites de integración son evidentemente 0 y 3.

```
> Int(j,y=0..3)=int(j,y=0..3);
```

$$\int_0^3 \frac{y^2}{4}\, dy = \frac{9}{4}$$

```
> evalf(rhs(%));
```

2.250000000

Terminaremos el presente laboratorio con dos ejercicios de aplicación a la economía, y específicamente sobre el excedente del consumidor y el excedente del productor.

EJEMPLO 1

La función de demanda para un producto es $p=22-0.8q$ donde p es el precio por unidad (en dólares) para q unidades. La función de oferta es $p=6+1.2q$. Determine el excedente de los consumidores y de los productores, bajo condiciones de equilibrio.

Solución:

1. Primero se debe encontrar el punto de equilibrio *(p, q)* usando el comando *solve*.
   ```
   > solve({p=22-0.8*q, p=6+1.2*q}, {p,q});
   {q=8, p=15.60}
   ```
2. Ahora determinaremos el excedente del consumidor (EC) con el comando *int.*
   ```
   > int( (22-0.8*q)-15.6, q=0..8 );
   25.60
   ```
3. Finalmente, determinaremos el excedente del productor

(EP), nuevamente empleando el comando *int.*

```
> int( (15.6-(6+1.2*q)), q=0..8 );
38.40
```

EJEMPLO 2

La ecuación de demanda para un producto es $q = \frac{90}{p} - 2$ y la ecuación de oferta es $q = p - 1$. Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

Solución:

1. Primero se debe encontrar el punto de equilibrio *(p,q)* usando el comando *solve*

   ```
   > solve({q=(90/p)-2, q=p-1}, {p,q});
   {p=-10, q=-11}, {p=9, q=8}
   ```

   Despreciamos la pareja (-10,-11) por razones obvias y nuestro punto de equilibrio será $(p,q)=(9,8)$.
2. Ahora obtendremos el límite superior de la integral del EC y el límite inferior de la integral de EP.

   ```
   > solve(eval(q=(90/p)-2,q=0),p);
   45
   > solve(eval(q=p-1,q=0),p);
   1
   ```

   Por lo tanto, el límite superior es igual a 45 en EC y el límite inferior es igual a 1 en EP.

3. Ahora determinaremos el excedente del consumidor con el comando *int.*

   ```
   > int( (90/p)-2 , p=9..45 );
   90 ln(5)-72
   > evalf(90*ln(5)-72);
   72.849412
   ```

   Finalmente, determinaremos el excedente del productor, nuevamente empleando el comando *int*.

```
> int( p-1, p=1..9 );
32
```

PRÁCTICA 6

1. Resolver las siguientes integrales:

a) $\int x^3 + 2x - 7dx$

b) $\int \frac{6}{(x+5)^3}dx$

c) $\int \frac{2t^2}{3+2t^3}dx$

d) $\int xe^{(4-x^2)}dx$

e) $\int \frac{8x}{3(7-2x^2)^{\frac{1}{3}}}dx$

2. Aplicar el método de los 8 pasos desarrollados en la sección de integral definida a las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3$

b) $f(x)=x$

c) $f(x)=x^2+7$

3. Resolver las siguientes integrales definidas:

a) $\int_2^{10} x^2 + 3xdx$

b) $\int_1^2 5x(5-x^2)^{\left(\frac{1}{2}\right)}dx$

c) $\int_0^2 \frac{3e^{(3x)}}{1+e^{(3x)}}dx$

4. Encuentre el área entre las siguientes curvas:

a) $y = x^2; y = x + 1$ b) $y = x - x^2; y = x^2 - 4x$

c) $y = x - x^2; y = x^3 - x^2$

5. En los siguientes problemas, la primera ecuación es de demanda y la segunda es de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de los productores y de los consumidores, bajo equilibrio del mercado.

a) $p = \frac{50}{q+5}$

$p = \frac{q}{9} + 4.5$

b) $q = 100(10 - 2p)$

$q = 50(2p - 1)$

Soluciones a los ejercicios impares

SOLUCIONES DE LA PRÁCTICA 1

■ Ejercicio 1

a) a^{136}

b) $a^{14} b^{56}$

c) 1

■ Ejercicio 3

a) Son igual a 0.7693

b) Son diferentes

■ Ejercicio 5

a) x=1.8732, y= 1.2422

b) x=0.4594, y = 1.022

SOLUCIONES DE LA PRÁCTICA 2

■ Ejercicio 1

a) –8

b) 5

c) 0

d) $-\infty$

■ Ejercicio 3

a) No es discontinua

b) No es discontinua

c) Discontinua en 1

SOLUCIONES DE LA PRÁCTICA 3

■ Ejercicio 1

a) $3(4x^2 - 6x)^2(8x - 6)$

b) $3x^2(-2x^4 + 3x) + (x^3 + 2)(-8x^3 + 3)$

c) $$\frac{6 + x^2}{2\left(\frac{-x}{-6 + x^2}\right)^{1/2}(-6 + x^2)^2}$$

d) $$\frac{4\ln(x^3 + x - 1)^3(3x^2 + 1)}{x^3 + x - 1}$$

e) $-6e^{-6x} + 6e^{6x}$

■ Ejercicio 3

a) -8

b) -4

c) $1/18$

SOLUCIONES DE LA PRÁCTICA 4

■ Ejercicio 1

a) $f'''(x) = 216x - 24$
$f''''(x) = 216$

b)

$$f''(x)=-\frac{e^{-x}+e^{-x}x^2+5e^x-4e^x x+e^x x^2}{(-1+x)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{2e^{-x}+3e^{-x}x+e^{-x}x^3+16e^x-15e^x x+6e^x x^2-e^x x^3}{(-1+x)^4}$$

■ Ejercicio 3

a) $\frac{dy}{dx}=-\frac{5}{2y}$; no hay pendiente

b) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y(1+5x)}{2x}$

$\frac{dy}{dx}=3$

c) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y(12e^{2x}x+12(e^{2x})^2x+3(e^{2x})^3x-1)}{x}$

$\frac{dy}{dx}=0.7394208464*10^8$

d)

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1000(2e^{-2x+y}+5)e^{-2x+y}}{(e^{-2x+y})^5-25(e^{-2x+y})^4+250(e^{-2x+y})^3-1250(e^{-2x+y})^2+3125(e^{-2x+y})-3125}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=0.4782452545*10^{-7}$$

SOLUCIONES DE LA PRÁCTICA 5

■ Ejercicio 1

Inciso a)

a) Max(1,5) Min(2,4)
b) Creciente (–∞,1) y de (2, ∞). Decreciente (1,2)
c) Cóncava hacia arriba (1.50, ∞),
   Cóncava hacia abajo (–∞,1.50)
d) Puntos de inflexión (1.5,4.6)

Inciso b)

a) Max (–1,1) Min(-2,0) y (0,0)
b) Creciente (–2,–1) y (0,∞).
   Decreciente (–∞,-2) y (–1,0)
c) Cóncava hacia arriba (–∞,–1.58) y (–0.423, ∞).
   Cóncava hacia abajo (–1.58,–0.423)
d) Puntos de Inflexión (–1.58,0.43) y (–0.423,0.445)

Inciso c)

a) Min (2,–7.56)
b) Creciente (2, ∞)
c) Cóncava hacia arriba (–1,5)
d) No existen puntos de inflexión

Inciso d)

a) No hay máximo ni mínimos, ni puntos de inflexión

■ Ejercicio 3

Mínimo q= 10 CP=50.55346833

SOLUCIONES DE LA PRÁCTICA 6

■ Ejercicio 1

a) $= \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 7x$

b) $= -\frac{3}{(x+5)^2}$

c) $= \frac{2t^2 x}{3+2t^3}$

d) $= -\frac{1}{2}e^{(4-x^2)}$

e) $= -(7-2x^2)^{2/3}$

■ Ejercicio 3

a) 474.6666667 b) 11.6666667

c) 5.309328504

■ Ejercicio 5

a) EC=9.293341868 EP=1.336612500

b) EC=1225 EP=1225/2

Bibliografía

Abell, M. & Brasselton, J. (2005). *Maple by example*. USA: Elsevier.

Aladjev, V. (2004). *Computer algebra systems: A new software toolbox for Maple*. USA: Fultus Corporation.

Carrillo, A. & Llamas, I. (2010). *Cálculo simbólico y gráfico con Maple*. España: RA-MA Editorial.

Garvan, F. (2001). *The maple book.* USA: Chapman & Hall/ CRS.

González, L. (2007). *Laboratorio de matemáticas (tomo I). Números y ecuaciones.* España: Addlink Software Científico, SL.

González, L. (2007). *Laboratorio de matemáticas (tomo II). Números y ecuaciones.* España: Addlink Software Científico, SL.

Heck, A. (2003). *Introduction to Maple.* USA: Springer.

Kamerich, E. (1999). *A guide to Maple*. USA: Springer.

Meade, D., May, S., Cheung, C. & Keough, G. (2009). *Getting started with Maple*. USA: John Wiley & Sons.

Pérez, C. (1997). *Métodos matemáticos y programación con Maple*. España: RA-MA Editorial.

Putz, J. (2003). *Maple animation*. USA: Chapman & Hall / CRC.

Sendra, J., Pérez, S. & Villarino, C. (2009*). Introducción a la computación simbólica y facilidades en Maple.* España: Addlink Media.

Maple 13 para cálculo diferencial e integral
Se terminó de editar en noviembre de 2011
en Epígrafe. Diseño Editorial
Verónica Segovia González
Marsella Sur 510, interior M, Colonia Americana
Guadalajara, Jalisco, México

Diseño editorial: VSG / *Corrección de textos:* Jorge Orendáin